الدكتور عادل فاخوري
المنطق
الرياضي



المنطق الرياضي

الدكتور عادل فاخوري



طبعة منقحة

المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع

الطبعة الثانية

١٩٨٨

المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع

بيروت ـ الحمراء ـ شارع اميل اده ـ بناية سلام
هاتف : ٨٠٢٤٢٨ ـ ٨٠٢٤٠٧ ـ ٨٠٢٢٩٦
بيروت ـ المصيطبة ـ بناية طاهر هاتف : ٣٠١٠٣٠ ـ ٣١١٣١٠
ص . ب: ٦٣١١ / ١١٣ تلكس: LE ٢٠٦٦٥ ـ ٢٠٦٨٠ لبنان

مقدّمة

أصبح للمنطق تاريخ ، بعد أن ظُن أنه نشأ كاملا ، مع واضعه أرسطو . فقد أسفرت الجهود ، خلال القرن الأخير ، عن إضفاء شكل جديد على هذا العلم ، اتخذ له اسم « المنطق الرياضي » أو أيضاً « المنطق الرمزي » . فالمنطق الجديد ، باستيعابه للقديم ، يلغي الحاجة إليه . بل ويتجاوزه بدقة الصياغة ، التي من لوازمها ، وليس من ذاتياتها ، استعمال الرموز ، وباستحداثه نظريات تتشعب في عدة اتجاهات ، وبتنوع المجالات التي ينطبق عليها . بحيث أن تأثيره شمل مختلف اصناف المعرفة ؛ فهو للفلسفة وتحليل اللغة والألسنية المعاصرة ومناهج العلوم وأصول الرياضيات ونظرية المعلومات وكثير غيرها ، أداة لا غنى عنها .

وقد قامت ، باللغة العربية ، محاولات لعرض بنيان المنطق الحديث لم تُضِفْ على منطق العرب ، من حيث الجوهر ، إلا بضعة رموز ، وأحياناً اصطلاحات غريبة ، تفضح النقل المنسوخ والجهل بالتراث . أما تلك التي وضعت لأغراض فلسفية ، فتسرعت إلى استخلاص احكام عامة ، لا تفيد في إجراء العمليات المنطقية والتحليل اللغوي ، وتقصر عن فهم المنهجية الجديدة ، وما يترتب عن ذلك من نقد للمعرفة . من هنا ، كان الغرض لهذا الكتاب إقامة المنطق الحديث ، بطريقة تمكن من معالجة الصيغ وبناء الانساق وإثبات البراهين . لأن معيار الفهم هو المقدرة على الاستعمال الصحيح ، ولا يستنير النظر الفلسفي إلا بمثل هذه المعرفة المتينة التي تحيط بتفاصيل الأمور .

يحتوي الكتاب على قسمين : منطق القضايا ومنطق المحمولات . وفي كل منهما ، نتدرج من الامثلة والشواهد ، إلى أقيسة دقيقة وطرق صورية بحتة . ففي منطق القضايا ، يقدم البابان الأولان بحثاً مسهباً في تعريف الروابط والبت في صحة الصيغ والأدلة ، يشكل مدخلاً أساسياً للمنطق الحديث ، سهل التناول على كل قارىء . ويعقب ذلك ضبط لبنية الحساب ، وتطبيقه على صياغة اللغة وإقامة نسق المسلمات ، ومن ثم تحديد عمليات الاستنباط والبرهان المتعلقة بالنسق، وتقرير بعض المسائل الناجمة عنه . وفي الباب الرابع ، يتم البرهان على خصائص النسق ، إستناداً إلى المقارنة بين المستويين : الدلالي والنحوي . ويجد هذا القسم ختامه ، بعرض مجموعة من الأنساق ، منها حساب الاستنباط الطبيعي لجنتسن ، الذي يمتاز بمنهجية واضحة وعملية . أما القسم الثاني ، فصعوبة علم الدلالة فيه ، تحول دون ايجاد طرق سهلة للاستدلال ، على غرار جداول الصدق . ولذلك أرجأنا تقرير المسائل إلى باب النحو . وبغية تيسير ذلك ، ألحقنا قواعد الاستنباط الطبيعي بالنسق الأكسيومي ، عن طريق اشتقاقها منه . وأفردنا الباب الأخير للبحث في المساواة ومتعلقاتها . ولم يكن القول على التجريد إلا للانتقال من منطق المحمولات إلى نظرية المجموعات . وفي معالجة ذلك ، انتهجنا لغة منطقية صريحة ، تقف وراء خطابة اللغة العربية لئلا تؤخذ بها . وضبطنا الاصطلاحات بتعاريف صارمة ، تُغني عن ذكر المرادفات الاجنبية بإزائها . وكانت المصادر التي استقينا منها المفردات حقبة من التراث ، تمتد من الكندي إلى الكلنبوي ، ولم نستحدث مصطلحاً إلا فيما ندر . هذا ، وتصميم الكتاب ، بما انطوى عليه من موضوعات ومسائل ، معد لاستيعاب مجالات أخرى متقدمة من هذا العلم ، ولكن تحقيق ذلك مرهون بمدى تقبل مثل هذا المؤلَّف في العالم العربي .

بيروت ، ١٥ كانون الثاني ١٩٧٤

عادل فاخوري

محتوى الكتاب

القسم الأول : منطق القضايا

القسم الأول

مَنطِق القضَايا

تركيب القضايا

١. القضية وصورة القضية

القضية

تتميز القضية عن سائر العبارات ، بأنها تقبل الصدق أو الكذب ، أو أية قيمة من هذا النوع . فالعبارات التالية هي ، مثلا ، قضايا :

١. دمشق هي مدينة
٢. إذا طلعت الشمس فسوف يرحل سندباد
٣. ٢ + ٣ = ٥
٤. إما زيد قد أضاع ماله أو محمود هو اللص
٥. ليست الأرض ساكنة .

إذا حققنا في تركيب هذه الامثلة ، نجد انها على صنفين : صنف يتحلل إلى أجزاء ، بعضها قضايا ، ويسمى قضايا مركبة ؛ والصنف الآخر لا يحتوي على أي جزء يؤلف قضية ، ويسمى قضايا بسيطة . فمن القضايا المركبة ، القضية ٢ ، التي تتألف من القضيتين « طلعت الشمس » و « سوف يرحل سندباد » ، يربط بينهما حرفا الشرط والجزاء « إذا ... فـ ... » . وكذلك القضية ٤ ، فإنها تتركب من « زيد قد أضاع ماله » و « محمود هو اللص » ، بواسطة الأدوات « إما ... أو ... » . والقضية ٥ ايضاً ، تقبل التحليل إلى جزئين يشكل أحدهما قضية تامة ، وهما « ليست » و « الارض ساكنة » .

في هذا القسم من الكتاب ، لن نبحث في التركيب الداخلي للقضية ، أي في العبارات المفردة التي تتألف منها القضية ؛ بل نعتبر القضية وحدة قائمة بذاتها ،

ننطلق منها لتركيب قضايا أكثر تعقيداً . ولذلك نسمي هذا القسم من المنطق ، « منطق القضايا » .

صورة القضية

لنقابل بين القضيتين الآتيتين :

« إذا امطرت الدنيا أو تساقط الثلج ، فلا يأتي زيد » .

« اذا كانت هذه القطعة من خشب أو كانت من زجاج ، فلا تكون موصلة للحرارة » .

فاننا نتبين ان تركيبهما ، رغم اختلاف المضمون ، هو واحد . لأن كل قضية منهما تحتوي على ثلاث قضايا ، تربط بينها ، على ترتيب معين ، الحروف نفسها . وهذا القالب ، أو الشكل المشترك ، الذي تتخذه كل قضية من الاثنتين نستطيع أن نؤديه هكذا :

« اذا .... أو ———— فلا —.—.»

حيث الفسحات « .... » ، « ———— » ، « —.—. » تشير إلى محلات فارغة ، معدة لتعبئتها بقضايا . فكما جرت العادة ، نريد أن نستعمل ، بدل الفسحات ، أحرفاً أبجدية هي : « ب » ، « ج » ، « د » الخ ... نطلق عليها اسم « متغيرات القضية » . ونكتب الشكل السابق على هذا النحو :

« إذا ب أو ج فلا د » .

لا شك ان هناك فرقاً بين « إذا ب أو ج فلا د » وبين احدى القضيتين ، لأنه بالنسبة للعبارة الأولى ، لا يمكن البت في الصدق أو الكذب ، بينما بالنسبة إلى القضيتين ، فإننا نستطيع ذلك ، لمعرفتنا بصدق أو كذب القضايا البسيطة التي تدخل في تركيبهما . فمتابعة الرموز « إذا ب أو ج فلا د » ليست بقضية ، إذ التقرير بأنها صادقة أو كاذبة ، خالٍ من المعنى ، فهي لا تتعين إلا بإحلال قضايا محل المتغيرات ، ولهذا نطلق عليها ، تمشياً مع التقليد الأرسطي ، اسم

« صورة القضية » . فصورة القضية إذن ، هي متتابعة من الرموز تحتوي على متغيرات ، بحيث انه ، إذا أحللنا قضايا محل المتغيرات ، على نحو ملائم ، نحصل على قضية . والقضية وصورة القضية ندرجهما تحت اسم عام هو « الصيغة » .

٢. الروابط

نلاحظ مما سبق، ان القضايا قد تُنفى بزيادة حرف السلب عليها ؛ أو أنها قد تتركب مع بعضها البعض ، بواسطة أحرف معينة لا تتغير ، أمثال « و » ، « إذا ... ف ... » ، « إما ... أو ... » الخ ... لتؤلف قضايا أكثر تعقيداً . فهذه الأحرف ، التي تتم بها عمليات السلب أو التركيب ، نسميها « الروابط » .

من الأكيد أن اللغات الطبيعية تستعمل الروابط بكثرة ، لكن قد يختلف معنى الرابط الواحد باختلاف الاطار اللغوي الذي يعرض فيه ؛ ورغم ان نحو كل لغة ، يضع قائمة من القواعد والاشارات ، لضبط مختلف وظائف هذه الأدوات ، فالابهام يبقى في أكثر من موضع . ولذا كان هدفنا المباشر ، البحث في كل رابط على حدة ، لنعين له مدلولاً واحداً متميزاً ، نشير إليه برمز جديد .

رابط السلب

للتعبير عن سلب القضية ، تستعمل اللغة العربية أدوات كثيرة ، منها « لا » و « لن » و « ما » الخ ... وايضاً فعلاً ناقصاً هو « ليس » . وقد تدخل هذه الكلمات على القضية ، التي يُراد نفيها ، في مواضع مختلفة ، في أول القضية كما في داخلها . أما نحن فنريد أن نستعيض عن كل هذه الكلمات برمز جديد ، هو « ¬ » ، نكتبه دائماً في أول القضية . فمثلا القضايا الآتية :

لم يشرب أفلاطون السم

العدد ٥ ليس أكبر من ٣

النيل لا يصب في البحر الأسود

نكتبها هكذا :

— يشرب أفلاطون السم

— العدد ٥ أكبر من ٣

— النيل يصب في البحر الأسود

واجمالا « ليس ب » نرمز إليها بـ « — ب » .

فيما يخص عمل أداة السلب من الناحية الصدقية ، فانها تدخل على القضية ، وتجعلها كاذبة ان كانت صادقة ، وصادقة ان كانت كاذبة . فهذا القول الذي ليس سوى تعريف لرابط السلب ، نؤديه بالجدول الآتي :

ب	— ب
ص	ك
ك	ص

حيث « ص » و « ك » هما اختصار للعبارتين « صادق » و « كاذب » ، اللتين يطلق عليهما اسم « القيم الصدقية » ؛ وحيث العمود الأول من الجدول ، يشير إلى القيم التي تحتملها « ب »، والعمود الثاني إلى القيم التي تتخذها « — ب» بالنسبة إلى قيم « ب » . فهذا الجدول ، وأمثاله من الجداول ، التي تحدد الروابط بالقيم الصدقية ، تسمى « جداول الصدق » .

اطلاق كلمة « رابط » على رمز السلب ، قد يثير التساؤل ، إذ هو لا يربط بين قضيتين أو أكثر ، بل يُسند إلى قضية واحدة . لكن هذه التسمية تجد تبريراً لها في أوجه الشبه الحاصلة بينه وبين سائر الأدوات ، التي تربط بالمعنى الحصري بين أكثر من قضية . كما ان مثل هذا التعميم ، الشائع في

لغة الرياضيات ، يسهل التطبيق أحياناً . ومع ذلك ، لكي نميز بينه وبين الروابط الأخرى ، نخصه باسم « الرابط الأحادي » .

والآن نأتي إلى الروابط الثنائية ، أي تلك التي تربط بين قضيتين ، وهي :

رابط الوصل

إذا أردنا أن نزعم صدق قضيتين معاً ، مثل :

ـ المتنبي شاعر

ـ ابن الهيثم عالم

فاننا نربط بينهما بالواو ، ونكتب :

المتنبي شاعر وابن الهيثم عالم .

وقد نستعين ، من باب البلاغة ، بأدوات أخرى مثل « لكن » و « بينما » فنقول :

المتنبي شاعر بينما ابن الهيثم عالم

فبدل الواو أو العبارات التي لها وظيفة مماثلة ، ندخل الرمز الجديد « ∧ » .
وهكذا فكتابة القضية السابقة تصبح :

المتنبي شاعر ∧ ابن الهيثم عالم

ونسمي القضية المركبة بواسطة رابط الوصل « القضية المتصلة » .

أما تعريف رابط الوصل ، فهو أن هذا الرابط يركب قضية جديدة من قضيتين . بحيث أن القضية الحاصلة تكون صادقة إذا ما كانت كل واحدة من القضيتين الفرعيتين صادقة ، وكاذبة في بقية الحالات . وبطريقة الجداول :

ب	ج	ب ∧ ج
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

يَظهر لنا من هذا الجدول، انه عند وجود قضيتين مختلفتين . فعدد تناويع القيم ، المساوي لعـــدد الأسطر ، هو اربعـــة . لأنه ، إما أن تكون القضيتان صادقتين معاً ، وإما الأولى صادقة والثانية كاذبة ، وإما الأولى كاذبة والثانية صادقة ، وإما الاثنتان كاذبتين معاً . وبهذا الترتيب للقيم الصدقية ، كما هو وارد في عواميد الجدول ، هو الذي نراعيه دائماً .

ثمة فارق مهم بين الروابط والعبارات المقابلة لها في اللغات الطبيعية . وهو ان الأولى لا تعتمد إلا على القيم الصدقية للقضايا ، ولا تتطلب أي شرط آخر من اشتراك في الموضوع ووحدة في السياق وغير ذلك من الاعتبارات ، كما تفعل الثانية . فمثلا ، القضية المتصلة :

٥ عدد فرد ∧ المتنبي شاعر

قـــد لا تجد قبولا في اللغات الطبيعية ، بينما هي ، من جهة المنطق ، مشروعة بل صادقة . وهذا الفارق يبرز خصوصاً في استعمال القضية الشرطية كما سنرى .

رابط الفصل

يُشار إلى هذا الرابط بالرمز « ∨ » ، وهو مأخوذ عن الحرف الأول للكلمة اللاتينية «vel» ، التي تؤديها اللغة العربية بـ « إما ... أو ... » وما شاكلها من الأدوات . اما تعريفه فيعطيه الجدول الآتي :

ب	ج	ب ∨ ج
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

يجب الانتباه إلى أنه حسب الجدول ، تكون هذه القضية ، التي تسمى «القضية المنفصلة» ، أيضاً صادقة في حال صدق القضيتين معاً . وبالتالي ، فاستعمالنا

للأدوات « إما ... أو ... » للتعبير عن رابط الفصل ، هو بالمعنى الذي يجيز الجمع بين القضيتين ، خلافاً للاستعمال الأكثر شيوعاً . مثال على ذلك :

إما أن يدرس عادل الفلسفة أو أن يدرس الرياضيات

فهذه القضيـــة تصدق إذا درس عادل احدى المادتين فقط ، أو درسهما معاً.

رابط الشرط

تلعب الأدوات « إذا ... ف ... » دوراً مهماً في اللغة العادية وفي لغة العلوم . ولذا تشعبت معانيها ، وكثر الالتباس حولها ، حتى شغلت بال المناطقة على مر العصور كلها . فتارة تستعمل بمعنى الاستنتاج المنطقي ، كما في القول :

إذا كان كل انسان فانياً فزيد فان

وطوراً ، تدل على علاقة السببية بين حالتين :

اذا حمي الحديد فإنه يتمدد

واحياناً تنبيء عن تصرف شخص ما :

اذا أمطرت فسيبقى زيد في البيت .

وقد تفيـــد معان أخرى عديدة ، يصعب ضبطها . ولكن ، باستعمالنا هنا « إذا ... ف ... » للدلالة على الشرط ، لن نعتبر هذه الفروق المتنوعة ، بل نوجه اهتمامنا إلى ما هو مشترك وعام لجميع هذه الامثلة ، وندرس فقط العلاقة الصدقية ما بين القضية الأولى ، التي تسمى « المقدم » ، والقضية الثانية ، التي اسمها « التالي » . ونستخدم الرمز « ← » للاشارة إلى رابط الشرط ، الذي نعرفه بهذا الجدول :

ب	ج	ب ← ج
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

على هـــذا الاساس ، تصدق القضايا التالية ، رغم انها تبدو غريبة وبعيدة عن الاستعمال الطبيعي ، لعدم وجود أدنى لحمة وشبه بين الطرفين .

اذا كان ٢ + ٣ = ٥ فالقاهرة عاصمة مصر

اذا كان ٢ + ٣ = ٤ فالقاهرة عاصمة مصر

اذا كان ٢ + ٣ = ٤ فالقاهرة عاصمة فرنسا

بينما تكذب القضية الشرطية فقط في حال صدق المقدم وكذب التالي :

اذا كان ٢ + ٣ = ٥ فالقاهرة عاصمة فرنسا .

غالباً ما يطلق على الشرط اسم « اللزوم المادي » ، مقابل اللزوم الصوري أو المنطقي ، لنسبة حاصلة بين الاثنين ،سوف نتحققها فيما بعد . لكن الاختلاف الكبير بينهما ، يجعلنا نعرض عن هذا الاسم ، تفادياً للالتباس .

رابط الشرط المعكوس

عادة ، يعبَّر عنه بـ « (ف) ... إذ ... » أي بتقديم جملة الجزاء عـلى « إذا » ، فيقال مثلا :

سيبقى زيد في البيت إذا امطرت السماء

ويُرمز إليه بالسهم المعكوس « ← » الذي يجد تعريفه في الجدول الآتي :

ب	ج	ب ← ج
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ك
ك	ك	ص

وواضح مـــن التعريف وشكل الرمز ، أن الشرط المعكوس يمكن رده بسهولة إلى الشرط ، بابدال القضيتين الواحدة بالأخرى . ولذلك غالباً ما يستغنى عنه .

رابط التشارط

نطلق عليه هذا الاسم ، لأنه يجمع بين الشرط والشرط المعكوس . ونرمز إليه بـ « ↔ » . أما تعريفه فهو :

ب	ج	ب↔ج
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

أي ان التشارط يصدق فقط في حال كون الطرفين لهما نفس القيمة . ويكذب في حال اختلاف القيم . وتؤدي اللغة العربية رابط التشارط بالعبارة « اذا ... ف ... وبالعكس » ، ونادراً ما تؤديه بالعبارة « ... فقط إذا ... » ؛ ومع ذلك فاننا نختار الاخيرة لموافقتها للمصطلحات الاجنبية : « *...si et seulement si...* » « *...if and only if...* » ، فنقول مثلا :

النهار موجود فقط إذا كانت الشمس طالعة

٢ + ٣ = ٤ فقط إذا كان العدد ٤ فرداً

ونكرر هنا أن القضية التشارطية ، اسوة ببقية القضايا ، لا تفترض اية علاقة بين طرفيها ، ولا تهتم إلا بالقيم الصدقية .

رابط التباين

مع أن اللغة العربية تعبر عنه بنفس الألفاظ التي تفيد رابط الفصل ، أي بـ « إما ... أو ... » ، « إما ... إما ... إما ... » الخ ... فهو يختلف عنه بأنه يمنع الجمع بين صدق القضيتين ، كما يستدل من الجدول التالي ، حيث « ≻≺ » هو رابط التباين :

ب	ج	ب ∨ ج
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

فمثلا ، القضية المركبة :

إما زيد أعمى وإما زيد بصير

تبين بوضوح أن « إما ... إما ... » مأخوذة بالمعنى الذي ينفي صدق القضيتين الفرعيتين معاً .

• **الجداول الكاملة للروابط الثنائية :**

في عرضنا السابق . توصلنا إلى بعض الروابط المهمة عن طريق المقارنة والاسترشاد بالأدوات التي تستعملها اللغة الطبيعية . ولكن يتضح لنا من الجداول التي اوردناها ، أن ايجاد الروابط لا يعتمد على احصاء لتلك الأدوات ، وانما هو مجرد عملية مزج للقيم الصدقية . إذ ان الرابط يُعرَّف بالقيم الصدقية التي يسندها إلى القضية المركبة ، بالنسبة إلى قيم القضيتين الفرعيتين . ففي حال الروابط الثنائية ، يعطى رابط الوصل هذا التنويع من القيم الصدقية : « ص ، ك ، ك ، ك » ، مقابل الترتيب الذي اتفقنا عليه لقيم القضيتين الفرعيتين ، ورابط الفصل تنويعاً آخر « ص ، ص ، ص ، ك » . وكذلك كل رابط يتميز عن غيره بتنويع خاص من القيم الصدقية . وبالتالي فعدد الروابط يساوي عدد

التناويع المختلفة من القيم الصدقية . في وجه عام ، إذا كان عدد القضايا م ، فبما أن كل قضية تحتمل احدى القيمتين « ص » أو « ك » ، يكون عدد الاسنادات المختلفة ن التي تسند قيماً إلى م قضية : $ن = ٢^{م}$. وبما أن كل اسناد من القيم يقابله بدوره ، في تعريف الرابط ، احدى القيمتين « ص » أو « ك »، فعدد الروابط $ر^{م}$ الممكنة بالنسبة إلى م قضية يكون $ر^{م} = ٢^{ن} = ٢^{٢^{م}}$. استناداً إلى هذه المعادلات ، نحصل حتى ٤ قضايا ، على الاعداد التالية لـ ن و $ر^{م}$:

م	ن	$ر^{م}$
١	٢	٤
٢	٤	١٦
٣	٨	٢٥٦
٤	١٦	٦٥٥٣٦

تشير اللائحة إلى أن عدد الروابط الثنائية هو ١٦ ، ولكننا لم نسرد منها حتى الآن إلا تلك التي تلعب الدور الأهم . أما سائر الجداول الممكنة فهي :

ب	ج	ب $ر^{2}_{1}$ ج	ب $ر^{2}_{2}$ ج	ب $ر^{2}_{3}$ ج	ب $ر^{2}_{4}$ ج	ب $ر^{2}_{5}$ ج
		٨	٧	←	→	↔
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص

ب	ج	ب $ر^{2}_{6}$ ج	ب $ر^{2}_{7}$ ج	ب $ر^{2}_{8}$ ج	ب $ر^{2}_{9}$ ج	ب $ر^{2}_{10}$ ج
		↑	↓	≻	≺	≻≺
ص	ص	ك	ك	ك	ك	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك

ب	ج	ب $ر^{2}_{11}$ ج	ب $ر^{2}_{12}$ ج	ب $ر^{2}_{13}$ ج	ب $ر^{2}_{14}$ ج	ب $ر^{2}_{15}$ ج	ب $ر^{2}_{16}$ ج
ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص

الروابط الستـــة الأخيرة ، أي من $ر^{٢}_{١١}$ إلى $ر^{٢}_{١٦}$ ، سوف نهملها ، لأنها لا تُظهر أدنى علاقة بقيم احدى القضيتين « ب » أو « ج » . فالرابط $ر^{٢}_{١١}$ هو دائم الصدق مهما اختلفت قيم « ب » و « ج » ، و $ر^{٢}_{١٢}$ يكرر فقط قيم « ب » ولا يتأثر بقيم « ج » ، وكذلك $ر^{٢}_{١٥}$ فهو يتخذ قيماً متناقضة مع قيم « ب » دون أن يتأثر بقيم « ج » الخ... فيبقى إذن عشرة روابط ثنائية بالمعنى الحصري ، خمسة منها ، أي من $ر^{٢}_{٦}$ إلى $ر^{٢}_{١٠}$ ، تتخذ على التوالي قيماً متناقضة مع قيم الروابط الخمسة الأولى ، المقابلة لها في القائمة ، وهي تمتد من $ر^{٢}_{١}$ حتى $ر^{٢}_{٥}$. أعني ان روابط الصف الثاني هي سلب لروابط الصـــف الأول ، وبالعكس . ولذلك كانت الرموز التي ادخلناها ، على شكل يشير الى هذه الخاصة .

من الرموز الجديدة ، الرابط « —< » الذي يعبر عنه بـ « ... لكن ليس ... » ، والرابط المعاكس له أي « >— » الذي يقرأ « ليس ... وانما ... » . وهذان نادرا الاستعمال وبعيدان عن الألفة ، لأنه يسهل التعبير عنهما بتركيب الروابط السابقة على نحو يتفق واستعمال اللغة الطبيعية ، كما تشهد على ذلك العبارات التي تؤدي هذين الرمزين . اما الرابطان $ر^{٢}_{٦}$ و $ر^{٢}_{٧}$ ، فهما على التوالي سلب للوصل وسلب للفصل ، ولذلك فاننا نرمز للاول بـ « ↑ » ، الذي نطلق عليه اسم « رابط منع الوصل » . ويعبر عنه مناطقة العرب بالأدوات « اما ... اما ... » دون تمييز . والمثل الجاري عندهم عليه هو

اما هذا الشيء حجر واما شجر

اذ ان هـــذه القضية تمنع جمع الصدق بين الطرفين ، ولكنها خلافاً لرابط التباين ، تسمح بكذب الطرفين معاً . ونرمز للرابط $ر^{٢}_{٧}$ ، الذي نقرأه « لا... ولا ... » ، بـ « ↓ » ، ونسميه رابط منع الفصل .

٣. تكرار التركيب واستعمال الأقواس

العمليات التي بدأنا بها ، بإسناد رابط السلب إلى قضية بسيطة أو إلى متغير قضية ، وبالربط بين قضيتين بسيطتين أو بين متغيرين ، يمكن ان نكرر تطبيقها دون حد ، على قضايا أو صور هي بدورها مركبة . هذا ما تفعله أيضاً اللغات الطبيعية . ولكن هذه الاخيرة قد تتعرض أحياناً للالتباس في صياغة الجمل المعقدة ، فقولنا مثلا :

ما صام زيد واعتكف

يحتمل في اللغة العربية احدى صيغتين : اما « ما صام زيد أو ما اعتكف » أو أيضاً « ما صام زيد ولكنه اعتكف » . وكذلك الجملة المركبة الآتية :

سوف يسافر سمير إلى القاهرة وسوف يذهب اخوه إلى دمشق إذا انتهى الامتحان .

لا تقطع إذا كان سفر سمير مشروطاً هو أيضاً بانتهاء الامتحان أو لا . في مثل هذه الحالات ، قد تعتمد اللغات الطبيعية على المتن ، الذي ترد فيه هذا الجمل ، لتلافي الابهام ، أو أنها قد تستفيد من كونها تستعمل أكثر من أداة للتعبير عن الرابط الثنائي ، فتحصر القضية المركبة ، التي تريد ربطها مع أخرى ، بين حرفين . وقد تستعين اللغات التي تتقبل الحالات الاعرابية ، كاللغة العربية ، بالعلامة الاعرابية للتمييز بين الصيغ المتعددة . كما أن هناك ايضاً وسائل أخرى عديدة ، تلجأ إليها مختلف اللغات الطبيعية . ومع ذلك فهي لا تتخلص تماماً من الابهام .

أما المنطق الجديد ، فهو يستخدم الأقواس ، لتعيين الضم والتفريق ما بين القضايا . وهذه الطريقة تتميز بالبساطة والضمان . فنكتب القضية الأولى على نحوين :

ما (صام زيد واعتكف)

(ما صام زيد) واعتكف

اللذان تقابلهما الصورتان :

⌐ (ب ∧ جـ)

(⌐ ب) ∧ جـ .

وكذلك فالصورتان اللتان تحتملهما القضية الثانية ، هما :

ب ∧ (جـ ← د)

(ب ∧ جـ) ← د

وهكـــذا ، إذا أردنا أن نؤلف قضايا أكثر تعقيداً ، من قضايا بعضها مركب ، استعملنا الأقواس ، لنحدد مجال الربط المقصود ، دون ترك امكانية لأكثر من تأويل واحد . لكن ، رغم منافع الأقواس ، إلا أن تراكمها في القضايا الطويلة قد يسيء إلى الوضوح ويدخل التشويش ، كما يظهر في هذه الصورة وغيرها من نظائرها :

(((ب ∧ جـ) ← (د ∨ (⌐ جـ))) ∧ (⌐ (ب))) ← (⌐ د)

ولذا كان لا بد لنا من أن نضيف بعض الاصطلاحات ، التي تسمح لنا بالتوفير من الأقواس .

أولا ، فيما يخص الروابط « ⌐ ، ∧ ، ∨ ، ← ، ↔ » ، نتفق على أن رابط السلب يربط أقوى من البقية ، ورابطي الوصل والفصل يربطان أقوى من الشرط والتشارط . أي أن مدى الضم أو الحصر هو أقصر لِـ « ⌐ » منه لغيره ، ويليه « ∧ ، ∨ » ، وأخيراً « ← ، ↔ » . على هذا الاساس ، يجوز لنا أن نكتب الصور الآتية :

((ب ∧ جـ) ∨ د) ← (هـ ∧ جـ)

((⌐ ب) ∨ جـ) ↔ (جـ ← (ب ∨ جـ))

(ب ↔ جـ) ∨ ((¬ (ب ← جـ)) ∧ ب)

هكذا :

(ب ∧ جـ) ∨ د ← هـ ∧ جـ

¬ ب ∨ جـ ↔ (جـ ← ب ∨ جـ)

(ب ↔ جـ) ∨ (¬ (ب ← جـ) ∧ ب)

ثانياً ، نلغي الأقواس عند تكرار السلب فنختصر مثلا :

¬ (¬ (¬ ب)

¬ (¬ (ب ∧ جـ))

بـ :

¬ ¬ ¬ ب

¬ ¬ (ب ∧ جـ) .

هـذا بالنسبة إلى الروابط الخمسة المذكورة . أما في حال اجتماعها مـع الروابط الأخرى ، فنتحرى كتابة كل الاقواس ، عـدا ما يتعلق برابط السلب الذي نعتبره أقوى الروابط ، بالمعنى الذي شرحناه .

تمرين :

احذف من الأقواس على قدر ما تجيز تلك الاصطلاحات الاضافية :

١. (¬ (¬ ب) ∧ جـ) ← (جـ ∨ ¬ د)

٢. (د ∨ ¬ (ب ∧ جـ)) ↔ ((¬ ب ∨ ¬ جـ) ← ¬ د)

٣. (ب ∧ (¬ جـ ∨ د)) ← ¬ (¬ (ب ∧ جـ))

٤. درجات اللغة

عندما ننسب في قضية ما ، شيئاً إلى شيء آخر ، فمن الواضح انا لا نستعمل في القضية الشيء نفسه ، بل اسم الشيء . فالقضية :

دمشق هي عاصمة سوريا

لا تحتوي على مدينة دمشق ، بل على اسم المدينة . وعادة ، في حال تكلمنا عن شيء أو حدث ، فالتمييز ما بين هذه واسمائها هو أمر بديهي . لكن قد يحدث الالتباس ، إذا ما كان المقصود نفسه عبارة لغوية . فإذا اعتبرنا ، على سبيل المثال ، القضيتين الآتيتين :

دمشق هي عاصمة سوريا

دمشق تتركب من أربعة حروف

لأدركنا انه ، في القضية الأولى ، إنما نقصد مدينة دمشق ، بينما في الثانية اسم المدينة ؛ والمدينة واسمها يختلفان كلياً . فاستعمالنا للكلمة مزدوج ، إذ مرة تدل على الشيء ، ومرة أخرى تدل على نفسها . فلكي نتجنب هذا الاشكال ، نضع الكلمة ، كما هو متبع ، بين هلالين ، بحيث ان الكلمة المحصورة بين هلالين تكون اسماً للكلمة . وهكذا تكون « دمشق » اسماً لدمشق. وفقاً لهذا الضبط ،تصبح القضية الثانية كاذبة ،لأن مدينة دمشق لا تتركب من أربعة حروف ، بل اسم المدينة . فحتى يصدق قولنا ، يجب ان نكتبها على النحو الآتي :

« دمشق » تتركب من اربعة حروف .

اذن ، فالقضية :

دمشق هي عاصمة سوريا

تحتوي على اسم دمشق . أي على « دمشق » ، بينما القضية :

« دمشق » تتركب من أربعة حروف

تحتوي عـــلى اسم اسم دمشق . أي « « دمشق » » . اما التعرض للالتباس هنا ، فيرجع إلى أن استعمال الهلالين ، للدلالة على العبارات ، يجعل الاسماء ترسم مدلولاتها كالصورة للشيء المصور ، بعكس العبارات التي تدل على الأشياء غير اللفظية ، إذ تلك العبارات تختلف تماماً عن الاشياء المندرجة تحتها . فبينما لا يوجد أي شبه بين الكلمة « دمشق » والمدينة دمشق . فالمطابقة الشكلية ظاهرة بـــين اسم الكلمة « دمشق » اي « « دمشق » » والكلمة « دمشق » . وقد يؤدي عدم التمييز ما بين الاسم المدلول . وسوء استعمال الهلالين إلى تناقض . فإذا زعمنا مثلا أن :

« ابن سينا » هو « ابو علي »

كانت هذه القضية كاذبة ، لأن شكل العبارة « ابن سينا » وتركيبها هما غير شكل العبارة « ابو علي »وتركيبها . فالأولى تتألف من سبعة حروف والثانية من ستة فقط ، كما ان بعض الحروف تختلف في كل من العبارتين . فالصادق هو ان نقول ان :

ابن سينا هو ابو علي .

ما وضعناه بشأن الشيء او الكلمة ، ينطبق تماماً عـــلى الموضوع ، إذا كان بدوره قضية . فاذا أردنا أن نحمل صفة ما على قضية ، وجب أن نستعمل اسم القضية . فإذا ما نعتنا بالصدق أو الكذب قولنا مثلا :

زيد مسافر

وجب أن نكتب :

« زيد مسافر » هو صادق

« زيد مسافر » هو كاذب

لان القضية هي التي تكون صادقة او كاذبة ، بمطابقتها أو عدم مطابقتها للواقع .

وبالتالي ، فقولنا :

زيد مسافر هو صادق

زيد مسافر هو كاذب

خالٍ من المعنى . وكذلك ، إذا أردنا أن نعبّر عن علاقة بين قضيتين ، وجب علينا أن لا نستعمل القضيتين ، بل اسمي القضيتين ، ففي الامثلة الآتية :

« كل انسان فان » أطول من « زيد فان »

« كل انسان فان » يلزم عنها « زيد فان »

« كل انسان فان » متلازمة مع « كل لا فان لا إنسان »

العلاقات : أطول من ، يلزم عنها ومتلازمة مع ، تربط بين اسماء القضايا . وهي ، من هذه الناحية ، تختلف عن الروابط المنطقية، التي يقوم عملها على الربط بين القضايا . هذا ما يدعونا أيضاً إلى أن نشدد على التمييز بين رابط الشرط « إذا ... ف ... » وعلاقة اللزوم « ... يلزم عن ... » ، وبين رابط التشارط « ... فقط إذا ... » وعلاقة التلازم « .... متلازم مع ... » رغم أوجه القرابة

من هذا العرض ، نخلص إلى أن اللغات ، من حيث الدلالة ، تنقسم إلى لغة تتكلم عن الاشياء ، التي ليست عبارات لغوية ، وتسمى « اللغة الشيئية » ، أو أيضاً ، حسب اصطلاح مناطقة العرب ، « اللغة من الدرجة الأولى » ؛ والى لغة تتكلم عن العبارات ، التي تدل على الاشياء ، أي عن العبارات التي تتكلم عن اللغة الشيئية ، وتسمى « ما وراء اللغة » أو « اللغة من الدرجة الثانية » ؛ وكذلك إلى اللغة التي تتكلم عن ما وراء اللغة ، وتسمى « ما وراء ما وراء

اللغة » ، وهكذا إلى ما لا نهاية له . فمن الامثلة التي تنتمي إلى اللغة الشيئية ، العبارات التالية :

زيد ، انسان

دمشق عاصمة سوريا

ب ، ¬ ج ، ب ∧ ج ، ب ∨ ج ← ¬ د ، ...

وفقاً لهذا التصنيف ، نعت اسماء ، وقضايا ومتغيرات هذه اللغة بأنها اسماء وقضايا ومتغيرات شيئية أو من الدرجة الأولى . ونسمي الاسماء والقضايا والمتغيرات ، التي تنتمي إلى ما وراء اللغة ، « ما ورائية » أو « من الدرجة الثانية » : ومن أمثال هذه الاخيرة .

« زيد » ، « فان »

« دمشق » تتركب من أربعة حروف

في الجملة « كان الجو ماطراً » ، « الجو » هو اسم « كان » و « ماطراً » خبره .

يُستعمل الفعل «*to be*» تارة أداة ربط كما في القول « *John is a student* » ،

وطوراً للدلالة على الوجود كما في « *John is in the garden* » .

نتبين من المثل الثالث ان نفس اللغة ، وهنا اللغة العربية ، قد تكون ، في ذات الوقت ، لغة شيئية ولغة ماورائية . أما في المثل الاخير ، فاللغة الشيئية هي الانكليزية ، واللغة الماورائية هي العربية .

في هذا الكتاب ، ضبطنا استعمال الهلالين ، وفقاً للقواعد التي شرحناها ، ولم ننحرف عنها ، إلا عند وقوع العبارات بعد النقطتين على أول السطر ، ففي هذه الحالة ، اهملنا الهلالين ، تبعاً للعرف ، وللتوفير في الكتابة .

البت في الصور
والأدلة

٥. تقييم الصور

تشكل جداول الصدق ، التي اقمناها للروابط الاحد عشر ، الجداول الأساسية ؛ لأننا نعتمد عليها في تقييم الصور والقضايا الأكثر تركيباً . أما الطريقة التي نسير عليها لتحقيق هذا الغرض ، فتتم بالمراحل التالية :

نرتب المتغيرات ، التي ترد في الصورة ، حسب الترتيب الابجدي ، في العواميد الأولى من الجدول ؛ واضعين تحت كل متغير القيم التي يتقبلها في كل الاسنادات المختلفة . وعدد هذه الاسنادات ، المساوي لعدد الصفوف ، هو كما نعلم ن = $٢^{م}$. ونجري ، في توزيع القيم ، على النهج الذي اتبعناه حتى الآن . فنضع تحت المتغير الأول ، على التوالي $\frac{٢^{م}}{٢}$ «ص» و $\frac{٢^{م}}{٢}$ « ك » ، ونكرر بالتناوب $\frac{٢^{م}}{٤}$ « ص » و $\frac{٢^{م}}{٤}$ «ك» تحت المتغير الثاني، و $\frac{٢^{م}}{٨}$ «ص» و $\frac{٢^{م}}{٨}$ « ك » تحت الثالث الخ ... ان وجد هناك أكثر من متغير . وهكذا إلى أن نصل إلى المتغير الأخير ، حيث نوزع بالتناوب مرة « ص » ومرة « ك » ، حتى تمتلىء سائر الصفوف . بعد ذلك، نشرع تدريجياً بتقييم الصور الفرعية، التي تتركب منها الصورة الكاملة ، وفقاً للجداول الأساسية ، ثم بتقييم الصور التي هي اكثر تركيباً ، إلى أن ننتهي إلى تقييم الصورة المطلوبة . هذه بعض الامثلة لتوضيح الطريقة التي رسمناها :

١. ب ٨ ¬ ب

ب	¬ ب	ب ٨ ¬ ب
ص	ك	ك
ك	ص	ك

٢. ب ٧ ج ← ب

ب	ج	ب ٧ ج	ب	ب ٧ ج ← ب
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ك	ك	ص

في العمود الرابع ، اعدنا كتابة « ب » ، حتّى نراعي اتجاه سهم الشرط في الصورة الكاملة . لذلك يجب ان نتنبه لتسلسل الصور الفرعية عند ورود الروابط « ← ، → ، ⤚ ، ⤙ » ، بينما هذا لا يضير في سائر الروابط الخاصة سيأتي بيانها .

٣. (ب ← ج) ٨ ⌐ ج ← ⌐ ب

ب	ج	ب←ج	⌐ ج	(ب←ج) ٨ ⌐ ج	⌐ ب	(ب←ج) ٨ ⌐ ج ← ⌐ ب
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص

٤. ¬ب ∨ د ↔ ¬(ب ∧ جـ)

ب	جـ	د	¬ب	د	¬ب ∨ د	ب ∧ جـ	¬(ب ∧ جـ)	¬ب ∨ د ↔ ¬(ب ∧ جـ)
ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ص	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص

وعلى هذا المنوال نواصل ، عند وجود ٤ متغيرات أو أكثر .

يمكن اختصار الجداول السابقة ، وذلك بأن نكتب الصورة الكاملة فقط ، موزعين أولا القيم تحت المتغيرات ، معيديها عند تكرار الأخيرة ، مع مراعاة الترتيب الابجدي . ثم ننتقل من مرحلة إلى أخرى ، في تقييم الصور الفرعية ، واضعين القيم تحت الرابط الذي نحن بصدده ، إلى أن نصل إلى الرابط الرئيسي للصورة الكاملة ، حيث يتحقق التقييم المطلوب . وعليه نكتب المثالين ٣ و ٤ على هذا النحو :

(ب	←	ج)	∧	¬	ج	←	¬	ب
ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك

¬	ب	∨	د	↔	¬	(ب	∧	ج)
ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ك

أما فيما يخص القضايا ، فنتبع في التقييم نفس التدرج ، باسناد فقط القيمة المعينة التي ترجع إلى كل قضية :

(المتنبي ألّف مسرحية هملت ← لندن عاصمة لبنان) ∨ المتنبي عربي

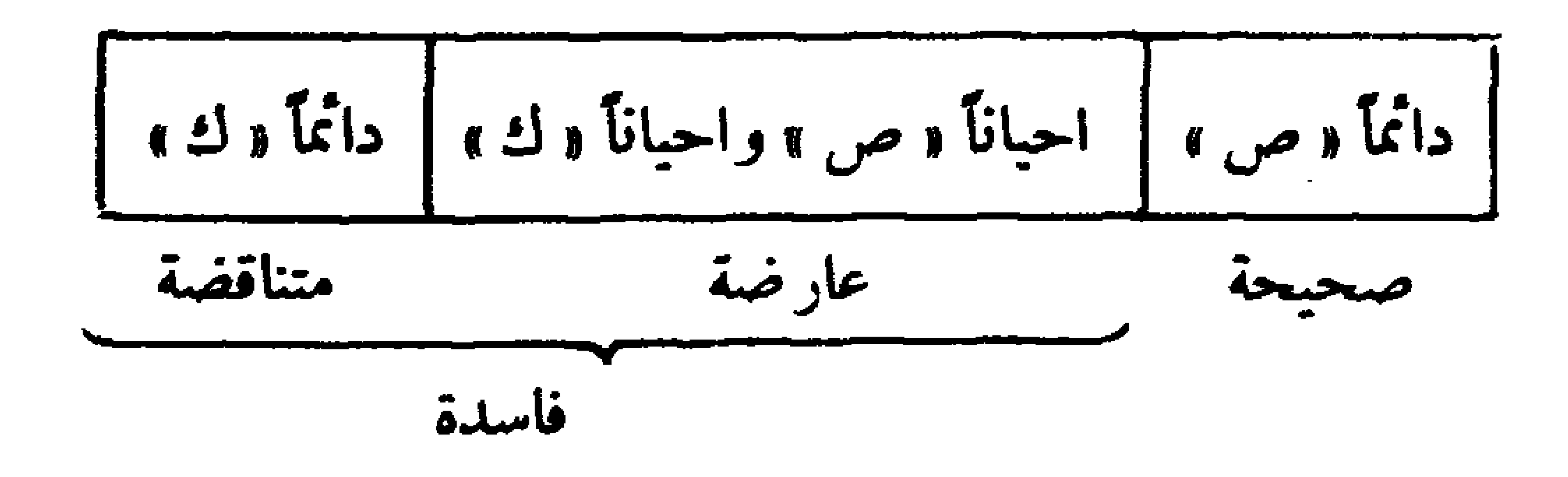
ك ص ك ص ص

٦. تصنيف الصور

في منطق القضايا ، يقال عن الصورة انها صحيحة فقط إذا صدقت عند كل اسناد من القيم إلى المتغيرات الداخلة في تركيبها . وبقول آخر ، فقط إذا كانت القيمة ، التي تأخذها الصورة ، في كل سطر من سطور جـداول الصدق ، هي « ص » ، مهما اختلفت قيم المتغيرات . طبقاً لهذا التعريف، تكون مثلا الصورة « ب ∧ ج ← ب » صحيحة ، كما نقرأ ذلك من جدولها :

ب	∧	ج	←	ب
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ك

فهذه الصورة ونظائرها من الصور الصحيحة ، نخصها في منطق القضايا باسم « الهيهيات » . أما الصورة التي يوجد لها اسناد من القيم يجعلها كاذبة ، اي تلك التي تحتمل « ك » ، مرة واحدة على الأقل ، فتسمى «صورة فاسدة » . والصورة الفاسدة ، ان كانت دائمة الكذب ، سميت « صورة متناقضة » ، وإلا كانت عارضة . هذا ما يجمله الجدول الآتي :



فمثلا ، الصورة :

ب ∨ (ج ∧ ¬ د)

هي فاسدة ، لأن الاسناد :

ب	∧	(ج	∧	¬	د)
ك	ك	ص	ص	ص	ك

يجعلها كاذبة ، ولكنها ليست متناقضة، اذ ان هناك عدة اسنادات من القيم ، تصدق فيها الصورة ، كما يبين جدول الصدق الكامل :

ب	∨	(ج	∧	¬	د)
ص	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ص	ص	ص	ص	ك
ص	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ك	ك	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ك

بينما الصورة « ب ∧ ¬ ب » هي كاذبة في سائر الحالات :

ب	∧	¬	ب
ص	ك	ك	ص
ك	ك	ص	ك

وبالتالي متناقضة .

اسوة بالصور ، نحمل التصنيف المذكور على القضايا. فنقول عن قضية ما انها صحيحة ، فاسدة ، متناقضة ، عارضة ، إذا كانت الصورة ، الناجمة عن ابدال نفس القضايا البسيطة ، الداخلة في تركيب تلك القضية ، بنفس المتغيرات ، هي صحيحة ، فاسدة ، الخ ...

لا شك ان القضية التي لها صورة صحيحة ، لا تخبرنا شيئاً عن الموضوع المقصود . فقولنا مثلا :

إما الجو يمطر وإما لا يمطر

لا يفيدنا البتة عن أحوال الجو الواقعة . وبالعكس ، فتقرير الصدق في امثال هذه القضية ، لا يحتاج إلى أن نستفهم اموراً خارجة عن الرموز المركبة للقضية . ولكن مع أن الهيهيات لا تأتي بخبر جديد ، فأهميتها تقوم على البت في الصور المعقدة ، وتعريف اللزوم والتلازم بين صور القضايا . من جهة أخرى ، ليست صحة الصور دائماً واضحة بالشكل المبتذل ، الذي تظهر عليه صورة القول السابق اي « ب ∨ ⌐ ب» . بل ان بعض الصور قد تبلغ درجة من الطول والتعقيد ، يصعب معها اكتشاف الصحة .

تمارين :

صنف صور القضايا التالية إلى صحيحة ومتناقضة وعارضة :

١. ⌐ ب ← (ب ← ج)
٢. ب ∨ ج ← ب
٣. ((ب ∧ ج) ∨ (⌐ ج ∧ د)) ∨ (⌐ ب ∧ ج)) ∨ (⌐ ج ∧ ⌐ د)
٤. (ب ← ⌐ ج) ∧ ⌐ (⌐ ب ∨ ⌐ ج)
٥. (ب ⋈ ج) ∨ (ب ∧ ج)
٦. ((ب ← ج) ∧ (ج ← د)) ∧ ⌐ د ← ⌐ ب
٧. ((ب ← ج) ∧ (د ← هـ)) ∧ (ب ∨ د) ← ج ∨ هـ
٨. ⌐ ((ب ← ج) ∧ د) ∨ ((⌐ ب ∨ د) ∧ ج)

٧. اللزوم

الغاية ، التي يسعى إليها المنطق ، هي كيفية الاستدلال على قضية جديدة من قضايا أخرى حاصلة . وقد كان قدماء مناطقة العرب يقولون ، في هذا الصدد ، بأن التفكير المنطقي هو عملية انتقال من معلوم إلى مجهول . فتحديد مفهوم هذا الانتقال ، وايجاد الطرق التي تمكننا من ممارسته ، سوف يستأثران بالقسم الأكبر من الابحاث المنطقية .

بين القضيتين :

إذا كان الجو ماطراً ، فزيد لايسافر

الجو ماطر

والقضية :

زيد لا يسافر

توجد نسبة أقوى من تلك التي عهدناها في الروابط المنطقيـــة ، مثلا في رابط الشرط . لانه ، كما سبق لنا أن رأينا ، قد يتفق أن تصدق القضية المركبة من ربط قضيتين بإحدى الروابط ، دون أن يكون هناك علاقة منطقية بين القضيتين . بينما الحال مختلفة هنا ، إذ القضية « زيد لا يسافر» لا بد لها أن تصدق عند افتراض صدق القضيتين السابقتين . اي ان الانتقال من افتراض صدق « إذا كان الجو ماطراً فزيد لا يسافر » و « الجو ماطر » معاً ، إلى صدق « زيد لا يسافر » ، لا يحتاج إلى اعتبار مادة القضايا الموضوعة ، من جهة مطابقة مضمونها للواقع ، بل فقط إلى المقارنة بين صورتي القضيتين الاوليين ، أي « ب ← ج » و « ب » ، وبين صورة الأخيرة اي « ج » . فللتعبير عن النسبة الحاصلة بين هذه القضايا ، يقال في لغة العرب ان :

القضايا الاولى تقتضي بالضرورة القضية الاخيرة

وايضاً :

عن الأولى تلزم الاخيرة

عن الأولى تنتج الأخيرة . الخ .

فهذه العلاقة الصورية القائمة بين بعض القضايا ، والتي حاول المنطق القديم ان يقربها إلى الفهم بمعان بديهية ، دون أن يصل إلى مفهوم ثابت ، تفتقر إلى تعريف دقيق ينفع في العمليات المنطقية . لهذا الغرض نريد أن نستعمل ، من الابجدية اليونانية ، الحروف « Φ ، Ψ ، X ، ... » وغيرها من الحروف المتناظرة ، كمتغيرات ماورائية للصور ، أي متغيرات لا تندرج تحتها الاحداث ، بل صور القضايا ؛ فهي إذن لا تنتمي إلى لغة منطق القضايا ، التي هي موضوع دراستنا ، بل إلى اللغة التي نستعملها للتكلم عن لغة منطق القضايا . وعليه ، فالمتغير الماورائي « Φ » يدل على اية صورة قضية، مثلا على «ب» أو «ب ← ⌐ ج» أو « ⌐ (ب ∨ ج) ← د» الخ ... وكذلك « Ψ » و « X » ... ثم اننا من الألفاظ المتعددة ، التي تشير إلى العلاقة الصورية المذكورة ، نفضل لفظة « اللزوم » ونرمز اليها بالعلامة « ⫤ » ، فنكتب :

$$\Phi_1 ، \Phi_2 ، \ldots ، \Phi_{\text{ن}} \models \Psi$$

لنقول انه عن Φ_1 ، Φ_2 ، ... ، $\Phi_{\text{ن}}$ تلزم Ψ . ونسمي Φ_1 ، Φ_2 ، ... ، $\Phi_{\text{ن}}$ المقـــدمات ، وΨ النتيجة . استناداً الى هـــذه المصطلحات ، نضع للزوم التعريف الآتي :

تعريف ١ : Φ_1 ، Φ_2 ، ... $\Phi_{\text{ن}} \models \Psi$ (ن ⩾ ٠)، فقط إذا كان كل اسناد من القيم تصدق فيه كل المقدمات Φ_1 ، Φ_2 ، ...، $\Phi_{\text{ن}}$ معاً، تصدق فيه ايضاً Ψ.

بقول آخر ، فقط إذا عند كل اسناد من القيم ، تأخذ فيه كل من $\Phi_{\text{ء}}$ (ء = ١ ، ٢ ، ... ، ن) القيمة « ص » ، يجب ان تكون قيمة Ψ

هي « ص » كذلك . فالتعريف يفرض إذن صدق النتيجة عند صدق المقدمات فقط . أما في الحالات الأخرى ، التي لا تصدق فيها كل المقدمات معاً ، فهو لا يفرض قيمة معينة على النتيجة ، بل يترك المجال مفتوحاً لأن تأخذ اية قيمة من القيمتين « ص » و « ك » . من ناحية أخرى ، فالتعريف موضوع على وجه عام ، بحيث يقبل أن يكون عدد المقدمات ن = ٠ ، وعندها ، مجرد كتابة « $\models \Psi$ » دون مقدمات ، تعني ان Ψ هي دائمة اللزوم، أي لا تتطلب مقدمات ، حتى تلزم عنها . وبالتالي ، نخلص من تعريف اللزوم إلى أن :

مسألة ١ : $\models \Psi$ فقط إذا كانت Ψ صحيحة

وهكذا ، فالرمز « $\models$ » يشير ، في حال عدم وجود مقدمات ، إلى صحة صورة القضية ، اي إلى دوام صدقها .

لنحاول الآن أن نتبين حصول اللزوم ، كما اتينا على تعريفه ، على صور المثال السابق ، أي بين « ب ← ج ، ب » وبين « ج » ، فالتقييم يعطينا :

« ب	←	ج »	« ب »	$\models$	« ج »
ص	ص	ص	ص		ص
ص	ك	ك	ص		ك
ك	ص	ص	ك		ص
ك	ص	ك	ك		ك

ومنها نستدل على ان المقدمات ، التي يقتصر عددها هنا على اثنين هما « ب ← ج » و « ب » ، لا تأخذ معاً القيمة « ص » إلا وتأخذ النتيجة كذلك القيمة « ص » . وبالتالي فاللزوم ينطبق فعلا .

يسهل علينا ، مما سبق ومن تعريفات الوصل والشرط ، ان نبرهن على هذه المسألة المهمة :

مسألة ٢ : $\Phi_1 , \Phi_2 , \dots , \Phi_n \models \Psi$ فقط إذا

$$\models (((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \dots) \wedge \Phi_n) \to \Psi$$

وتفسيرها انه عن المقدمات Φ_1 ، Φ_2 ، ... ، Φ_n تلزم النتيجة Ψ ، فقط إذا كانت الصورة الشرطية ، التي مقدمها وصل للمقدمات Φ_1 ، Φ_2 ، ... ، Φ_n وتاليها النتيجة Ψ ، اي $(((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \dots) \wedge \Phi_n) \to \Psi$ ، صحيحة. لان الصورة المتصلة ، حسب تعريف رابط الوصل ، لا تصدق إلا حين صدق كل من القضايا المربوطة برابط الوصل معاً ؛ والصورة الشرطية تكون صحيحة، إذا امتنع ان يصدق المقدم ويكذب التالي . وهذا ما يعادل تعريف اللزوم . لذلك ، فالبت في لزوم صورة عن صور أخرى ، يعود إلى البت في صحة الصورة الشرطية المركبة على الشكل المذكور . اما البت في الصحة عامة ، فقد سبقت لنا ممارسته على طريقة الجداول .

عند اقتصار عدد المقدمات على واحدة ، تصح هذه الحالة الخاصة من المسألة السابقة وهي :

مسألة ٣ : $\Phi \models \Psi$ فقط إذا $\models \Phi \to \Psi$

أي ان قولنا «عن Φ تلزم Ψ »، يعادل قولنا ان «الصورة الشرطية $\Phi \to \Psi$ هي صحيحة» . من هذه المسألة ، تتضح الصلة القائمة بين اللزوم « $\models$ » والشرط « $\to$ » . ومع هذا ، يبقى اختلاف اساسي بين الاثنين ، نلفت الانتباه اليه تجنباً للاشكال . فمن جهة ، تنتمي علاقة اللزوم « $\models$ » إلى اللغة الماورائية ، إذ هي تربط بين عبارات اللغة الماورائية . كما يُشير إلى ذلك الهلالان في كتابة «ب» $\models$ «ج» مثلا . بينما رابط الشرط يربط بين عبارات اللغة الشيئية ، فنكتب الصورة الشرطية الموافقة للزوم المذكور هكذا : «ب ← ج» . ومن جهة أخرى ، فاللزوم أخص من الشرط ، اي انه ، اذا كان ثمة لزوم بين قضيتين ، وذلك عند حصول اللزوم بين صورتيهما ، فالقضية الشرطية المؤلفة

من هاتين القضيتين ، هي صادقة . ولكن العكس غير صحيح ، إذ قد تصدق القضية الشرطية ولا يكون لزوم . فقولنا :

كليوباترا تتكلم العربية ← كليوباترا مصرية

ك　　　ص　　　ص

هو صادق ، ومع ذلك فلا لزوم بين القضية الأولى والثانية ؛ لان صورة هذه القضية الشرطية تحتمل القيمة « ك » ، كما يظهر من الجدول الآتي :

ب	←	جـ
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ص	ك

بالاضافة إلى ما سبق ، يجدر التنويه هنا ، بأن حكمنا :

$\Phi \dashv \Psi$

هو أخص من حكمنا :

إذا $\dashv \Phi$ ف $\dashv \Psi$

اعني ، عن الحكم الأول يلزم الثاني ، بينما العكس لا يستقيم . وبالفعل ، إذا افترضنا صدق « $\Phi \dashv \Psi$ » ، لوجب ان تصدق Ψ كلما صدقت Φ ؛ وبما أن مقدم الحكم الثاني يشترط صحة Φ ، أي دوام صدقها ، فكان لا بد ان

تكون Ψ دائمة الصدق أيضاً . ولكن قد يصدق الحكم الثاني، دون ان يحصل اللزوم كما في الحكم الأول ، فعندما ، مثلا ، تكون Φ « ب ← ج » و Ψ « ب ∧ ج » ، يثبت لنا الجدولان الآتيان :

ب	←	ج
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ص	ك

ب	∧	ج
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ك	ص
ك	ك	ك

ان الصورة « ب ← ج » هي غير صحيحة، وكذلك « ب ∧ ج » غير صحيحة، وبالتالي فالشرطية « إذا ⊨ Φ ف ⊨ Ψ » صادقة . ومع ذلك ، يظهر من مقارنة قيم الصورتين ، انه قد يتفق ان تصدق الأولى وتكذب الثانية معاً .

لقد سبق ان تقرر عندنا ، ان صحة الصورة لا تتعلق باسناد معين من القيم للمتغيرات الداخلة في التركيب ، لانه مهما كان الاسناد ، فلا بد أن تصدق الصورة . وعليه : إذا احللنا اية صورة قضية محل متغير ما ، في كل المواقع التي يرد فيها هذا المتغير ضمن الصورة ، فسوف تحتفظ الصورة ، الناجمة عن الاحلال ، بصحتها . فمثلا من صحة :

ب ∨ ¬ ب

نستدل على صحة :

ج ∨ ¬ ج

(ب ∧ ج) ∨ ¬ (ب ∧ ج)

(¬ ب ← ج ∧ د) ∨ ¬ (¬ ب ← ج ∧ د)

الخ ...

وبالطبع ، يُشترط بالاحلال المذكور ، الذي نخصه باسم «الابدال » ، أن يكون مطرداً ، اي ان احلال صورة ما محل المتغير ، يجب أن يتم في كل المواقع التي يرد فيها هذا المتغير . وإلا لفقدت الصحة ، كما نلاحظ ذلك من احلال « ج » محل « ب » مرة واحدة في الصورة السابقة ، اذ الحاصل الذي هو « ج ٧ – ب » ليس بصحيح . بناء على هذا الشرح ، إذا استعملنا الحرف الغليظ « **ب** » كمتغير ماورائي يشير إلى أي من متغيرات القضية « ب ، ج ، د ... » ، وعنينا بِـ $\Phi_{\text{ب}}$ اية صورة تنطوي على المتغير ب، و بِـ $\Phi_{\Psi/\text{ب}}$ الصورة الناجمة عن الأولى بإبدال ب بـ Ψ ، فإننا نؤدي المسألة ، المعروفة بمسألة الابدال ، على هذا النحو :

مسألة ٤ : إذا ⊨ $\Phi_{\text{ب}}$ فـ ⊨ $\Phi_{\Psi/\text{ب}}$

وبوجه عام : اذا ⊨ $\Phi_{\text{ب}_{٢}، \text{ب}_{٢}، \ldots ، \text{ب}_{\text{ن}}}$ فـ

⊨ $\Phi_{\Psi_{١}/\text{ب}_{١}، \Psi_{٢}/\text{ب}_{٢}، \ldots ، \Psi_{\text{ن}}/\text{ب}_{\text{ن}}}$

أعني ، إذا صحت الصورة Φ التي تحتوي على المتغيرات $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$ ، ... $\text{ب}_{\text{ن}}$ ، فتصح كذلك الصورة الناجمة عنها ، بوضع $\Psi_{١}$ ، بدل $\text{ب}_{١}$ ، $\Psi_{٢}$ بدل $\text{ب}_{٢}$ ، ... ، $\Psi_{\text{ن}}$ بدل $\text{ب}_{\text{ن}}$. أما عكس هذه المسألة فلا يستقيم ، إذ قد يتفق أن يحصل بالابدال ، عن صورة فاسدة ، واحدة صحيحة . فعن الصورة الفاسدة « ب ← ج » ، تحصل الصورة الصحيحة « ب ← ب » ، عند ابدال « ج » بِـ « ب » .

تفيد مسألة الابدال في تركيب عدد لامتناه من الصور الصحيحة ، انطلاقاً من صورة معينة ، سبق لنا التعرف على صحتها ، كما انها تساعد على البت في صحة صورة ما ، وذلك إذا أمكن ايجاد صورة صحيحة ، تنجم عنها ، بالابدال ، الصورة المطلوب تقييمها .

من المسائل التي تهم اللزوم أيضاً، تمكننا الاعتبارات السابقة أن نضع التالية ، مع الاشارة إلى ان المتغير الماورائي « T » يرمز إلى الصور الصحيحة، والمتغير الماورائي « ⊥ » إلى الصور المتناقضة :

مسألة ٥ : Φ ⫤ Φ

أي كل صورة تلزم عن ذاتها، وتُسمى هذه الخاصة « خاصة الانعكاس ».

مسألة ٦ : إذا Φ ⫤ Ψ و Ψ ⫤ X فـَ Φ ⫤ X

وهذه المسألة تشير إلى خاصة التعدي ، بمعنى انه اذا حصل اللزوم بين صورة وأخرى ، وبين الأخرى وواحدة ثالثة ، فاللزوم يتعدى من الأولى إلى الثالثة .

مسألة ٧ : Φ ⫤ T

أي الصورة الصحيحة تلزم عن اية صورة .

مسألة ٨ : إذا Φ ⫤ ⊥ فـ ⫤ ⌐ Φ

إذا لزم ، عن صورة ما ، صورة متناقضة ، فسلب تلك الصورة صحيح .

مسألة ٩ : إذ T ⫤ Φ فـَ ⫤ Φ

إذا لزمت صورة ما ، عن صورة صحيحة ، فتلك الصورة صحيحة .

أخيراً ، من الناحية التطبيقية ، فتعريف اللزوم والنظريات التي ترتبت عنه ، تمدنا بوسائل فعالة وسهلة ، للتحقق من صحة كثير من الأدلة المباشرة وغير المباشرة ، التي شغلت المنطق القديم ، بل إنها تتجاوز احصاءات هذا الاخير ، فتشمل انواعاً مختلفة من الادلة المستعملة في اللغة العادية واللغة العلمية . إذ الدليل الصحيح ، يُفهم به قيام اللزوم بين المقدمات والنتيجة على النحو الذي عرفناه ، وبالتالي ، فالبت في صحة الدليل يعني البت في اللزوم ، وهذا يرجع ، وفقاً

للمسألة ٢ ، إلى ألبت في صحة القضية الشرطية ، التي مقدمها وصل لمقدمات الدليل وتاليها نتيجته . إليك امثلة توضح الطريقة :

١. إما المتنبي لم يؤلف مسرحية هملت أو المتنبي انكليزي
المتنبي ليس انكليزياً
∴ المتنبي لم يؤلف مسرحية هملت

٢. إذا أزهر الشجر فالربيع أقبل
∴ إذا لم يقبل الربيع فالشجر لم يزهر

٣. اما أن ترتفع الضريبة أو الحكومة تقع في عجز
إذا ارتفعت الضريبة فالشعب يتذمر
لم تقع الحكومة في عجز
∴ الشعب يتذمر

فللتحقق من صحة هذه الأدلة ، نركب الصور الخاصة بالقضايا ، التي يتألف منها الدليل ، فنحصل على ما نسميه « صور الأدلة » ، وهي على التوالي :

١. ⌐ ب ٧ ج
⌐ ب
∴ ⌐ ج

٢. ب ← ج
∴ ⌐ ج ← ⌐ ب

٣. ب ٧ ج
ب ← د
⌐ ج
∴ د

ثم نبت في اللزوم ، وذلك بأن نصوغ صور القضايا الشرطية الموافقة لصور هذه الأدلة، على الشكل الذي سبق شرحه، ونمتحن صحتها بواسطة الجداول هكذا:

١. (¬ ب ٧ جـ) ٨ ¬ جـ ← ¬ ب

(¬	ب	٧	جـ)	٨	¬	جـ	←	¬	ب
ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك

٢. (ب ← جـ) ← (¬ جـ ← ¬ ب)

(ب	←	جـ)	←	(¬	جـ	←	¬	ب)
ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك

٣. ((ب ٧ جـ) ٨ (ب ← د)) ٨ ¬ جـ ← د

((ب	٧	جـ)	٨	(ب	←	د))	٨	¬	جـ	←	د
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك

من هذه الجداول ، نطلع على دوام الصدق ، أي على صحة الصورة الشرطية ، وبالتالي على صحة الأدلة :

٨. التلازم

تعريف ١ : نقول عن صورتين Φ و Ψ انهما متلازمتان ، أو أن Φ متلازمة مع Ψ ، فقط إذا كانت عن Φ تلزم Ψ وعن Ψ تلزم Φ ، أي Φ ⫤ Ψ و Ψ ⫤ Φ .

ولهذا نرمز إلى التلازم بـ « Φ ⫤⊨ Ψ » . ينتج عن هذا التعريف :

مسألة ١ : Φ ⫤⊨ Ψ إذا فقط ⫤ Φ ↔ Ψ

أعني أن Φ هي متلازمة مع Ψ ، عندما تكون الصور التشارطية Φ ↔ Ψ صحيحة. والبرهان يتضح إذا ما تدرجنا على التسلسل الآتي :

١. Φ ⫤⊨ Ψ إذا فقط Φ ⫤ Ψ و Ψ ⫤ Φ — تعريف ١

٢. Φ ⫤ Ψ و Ψ ⫤ Φ إذا فقط ⫤ Φ ← Ψ و ⫤ Ψ ← Φ — المسألة ٣،٧*

٣. ⫤ Φ ← Ψ و ⫤ Ψ ← Φ إذا فقط ⫤ Φ ↔ Ψ — تعريف الوصل والتشارط

بناء على هذه المسألة ، يرجع تقرير التلازم إلى تقرير صحة التشارط ؛ وهذه العملية الاخيرة سهل التحقق منها ، بواسطة الجداول . فهكذا ، مثلا ، يصدق زعمنا أن :

« ب ← (ج ∨ د) » ⫤⊨ « (ب ← ج) ∨ (ب ← د) ».

لان القضية التشارطية الموافقة لا تحتمل إلا القيمة «ص»، كما يبين هذا الجدول

---

* العدد ما قبل الفاصلة يشير الى رقم المسألة ، والذي بعد الفاصلة يشير الى رقم الفصل . أما حين ذكر رقم المسألة دون الفصل ، فللاشارة الى المسألة من الفصل نفسه .

ب	←	(جـ	V	د)	↔	(ب	←	جـ)	V	(ب	←	د)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك

وفوق ذلك ، نقرأ في الجدول مساواة القيم بين الصورتين المتلازمتين ، ممـا يرشدنا إلى استخلاص المسألة الآتية :

مسألة ٢ : Φ =||= Ψ فقط إذا في كل اسناد من القيم، إما Φ و Ψ تصدقان معاً ، وإما تكذبان معاً .

وبقول آخر ، فالصورتان المتلازمتان تحتملان نفس القيم . فبما أن أهمية القضايا قائمة على مطابقتها أو عدم مطابقتها للواقع ، أعني على صدقها أو كذبها ، كان ان القضايا ، التي صورها متلازمة ، تفيد الخبر نفسه ، أي الواحدة تعيد ما تقوله الأولى ، ولكن بطريقة مختلفة . وهذا ما يتيح إمكانية الاستعاضة عن قضية بقضايا أخرى ، وهي عملية ، يُلجأ إليها غالباً في اللغات الطبيعية ، بغية الايجاز وتجنب التكرار ومنافع أخرى جمة . فمثلا قولنا :

إذا اختلفت دولة مع أخرى فانها تعلن الحرب ، أو إذا اختلفت دولة مع أخرى فإنها تشكو إلى الامم المتحدة

يمكن أن ينوب عنه ، حسب التلازم الذي تحققناه في الصورة الأخيرة ، هذا القول :

إذا اختلفت دولة مع أخرى فإنها إما أن تعلن الحرب أو تشكو إلى الامم المتحدة .

وأمثال هذه القضايا ، التي تنوب بعضها مناب البعض ، كثيرة في كلام العرب * . ففي اللغة العربية ، تتلازم القضايا الآتية :

لا يتوب المؤمن عن الخطيئة ويدخل النار

ان تاب المؤمن عن الخطيئة لم يدخل النار

إما أن لا يتوب المؤمن عن الخطيئة وإما لا يدخل النار .

وعلى العموم ، فالصور المتلازمة يمكن أن ينوب بعضها مناب البعض ، مرة أو أكثر ، في كل صورة تدخل في تركيبها ، دون أن تختلف بذلك ، القيم الصدقية التي تأخذها الصيغة المستحصلة من تغيير المتلازمات ، عن قيم الصيغة الأصلية . لأن الصور ، التي تنوب مناب المتلازمات معها ، لها نفس قيم الأخيرة ؛ وكل الاعتبار في القضايا يعود إلى التقييم. هذا الحكم يمكن تلخيصه بالمسألة الآتية :

مسألة ٣ : إذا $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ فَـ $\models X_{\varphi} \leftrightarrow X_{\varphi}^{\Psi}$

حيث X_{φ} تشير إلى الصورة X ، التي تدخل Φ في تركيبها ، وحيث X_{φ}^{Ψ} تدل على الصورة الناجمة عن الأولى ، باحلال Ψ محل Φ ، مرة أو أكثر . إليك مثلا للتوضيح :

بسبب قيام التلازم بين « ب ← ج » و « ¬ ب ∨ ج » ، فإن « ¬ ب ∨ ج » يمكن أن تنوب عن « ب ← ج » ، في الصورة :

---

* انظر : مفتاح العلوم ، تأليف ابي يعقوب يوسف بن أبي بكر محمد بن علي السكاكي. صفحة ٢٣٥ . طبعة مصطفى الحلبي . مصر ١٩٣٧ .

(ب ← ج) ∧ ¬ ج ← ¬ (ب ← ج) ∨ ¬ ب

اي ان تحل محلها ، مرة أو أكثر ، وفق عدد المرات التي ترد فيها « ب ← ج »، بحيث انه يجوز لنا الحصول على :

(¬ ب ∨ ج) ∧ ¬ ج ← ¬ (ب ← ج) ∨ ¬ ب

(ب ← ج) ∧ ¬ ج ← ¬ (¬ ب ∨ ج) ∨ ¬ ب

(¬ ب ∨ ج) ∧ ¬ ج ← ¬ (¬ ب ∨ ج) ∨ ¬ ب

وهذه كلها متلازمة مع الصورة الأصلية ، كما يسهل التحقق من ذلك عن طريق جداول الصدق .

يجب التنبه إلى الفرق بين العمليتين ، اللتين اصطلحنا عليهما بالابدال والمناب. فبينما ، أولا ، لا يجوز اجراء الابدال ، إلا على متغيرات القضايا فقط ، وليس على أية صورة ، فالمناب يتم على أية صورة دون استثناء . وثانياً ، يشترط في الابدال ، احلال الصورة محل المتغير في كل المواقع التي يرد فيها هـذا المتغير ، بينما ذلك متروك للاختيار في المناب . وثالثاً ، فالابدال لا ينطبق الا على الصور الصحيحة ، اي لا يحفظ القيم إلا في الصور الصحيحة ، أما في المناب ، فجميع أصناف الصور تبقى على القيم نفسها .

من المسألة السابقة ، نحصل مباشرة على المسألة المسماة بـ « مناب المتلازمات»، وهي :

مسألة ٤ : إذا $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ و $\models X_{\varphi}$ فـ $\models X^{\Psi}_{\varphi}$

أي ان الصورة ، الناجمة عن تغيير جزء من صورة صحيحة بمتلازم معه ، مرة أو أكثر ، هي صحيحة . والبرهان على ذلك أنه ، عند افتراض $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ ،

ينتج ، حسب المسألة ٣ ، أن $\models X_\varphi \leftrightarrow X^\psi_\varphi$ ، فبما أن $\models X_\varphi$ أيضاً ، وجب ان تكون $\models X^\psi_\varphi$ كذلك ، وفقاً لتعريف التشارط .

وهكذا فالمناب لا يغير من قيم الصور شيئاً . وفي حال صحة الصور ، فهو يُبقي على صحتها . لذلك ، تقدم هذه العملية منافع كبيرة في تحويل الصور ، وعلى الاخص في تبسيطها واختصارها ، كما سنأتي على ذلك ، فيما بعد ، بالتفصيل . فمن معرفتنا ، مثلا ، بالتلازم بين «ب ∨ ب» و «ب» ، وبين «⌐ (⌐ ب ∧ ⌐ ب)» و «ب ∨ ب» ، يمكن تحويل الصورة :

⌐ (ب ∨ ب) ∧ (ج ← ⌐ (⌐ ب ∧ ⌐ ب)) ← ⌐ ج ∨ (ب ∨ ب)

إلى :

⌐ (ب ∨ ب) ∧ (ج ← (ب ∨ ب)) ← ⌐ ج ∨ (ب ∨ ب)

ثم إلى :

⌐ ب ∧ (ج ← ب) ← ⌐ ج ∨ ب .

مما يختصر كثيراً في عملية التقييم .

بعد ما مر من مسائل وشروحات ، ليس بالعسير التحقق من أن التلازم يتمتع بالخصائص الآتية :

مسألة ٥ : الانعكاس : $\Phi \dashv\models \Phi$

مسألة ٦ : التعدي : إذا $\Phi \dashv\models \Psi$ و $\Psi \dashv\models X$ فَ $\Phi \dashv\models X$

مسألة ٧ : التبادل : $\Phi \dashv\models \Psi$ فقط إذا $\Psi \dashv\models \Phi$

وكذلك يصدق :

مسألة ٨ : $\Phi =\!\!\mid\!\mid\!\!= \Phi \wedge T$

مسألة ٩ : $\bot =\!\!\mid\!\mid\!\!= \Phi \wedge \bot$

مسألة ١٠ : $\Phi =\!\!\mid\!\mid\!\!= \Phi \vee \bot$

مسألة ١١ : $T =\!\!\mid\!\mid\!\!= \Phi \vee T$

* * *

في هذا الباب من منطق القضايا ، كانت القيم الصدقية المعيار الذي نعتمد عليه في تحديد وضبط المفاهيم، وعلى الاخص اللزوم . والحال أن الصدق والكذب، تتصف بهما القضايا، من جهة مطابقتها أو عدم مطابقتها للمدلولات . لذلك تسمى المفاهيم ، التي تقوم على صلات بين عناصر لغوية وغير لغوية ، « المفاهيم الدلالية » ؛ والعلم الذي يبحث فيها ، يسمى « علم الدلالة » . فاعتبار المنطق إذن ، من حيث هو علم الانتقال من قضايا إلى أخرى ، عن طريق اللزوم ، يشكل البنية الدلالية للمنطق .

٩. مقتطف من الصور الصحيحة

ان عدد الصور الصحيحة ، التي يمكن تركيبها بواسطة الروابط ، هو غير متناه . ولكن البعض منها ، تمتاز عن غيرها بكثرة استعمالها والانتفاع منها في عمليات الابدال والمناب ، التي نستعين بها للبت في صحة الصور الأخرى ، وعلى الأخص في الأدلة ، كما انها تشير إلى الخصائص التي تتمتع بها الروابط المنطقية ، أو تمثل المبادىء الأساسية ، التي هي عمدة التفكير المنطقي . في هذا الفصل ، نختار ثلاث قوائم من الصور الصحيحة ، تظهر الميزات المذكورة .

مبادىء منطق القضايا

١. مبدأ الثالث المرفوع :

⊢ ب ∨ ∼ ب

٢. مبدأ عدم التناقض :

⊢ ∼ (ب ∧ ∼ ب)

ان اطلاقنا على هاتين الصورتين اسم : المبدأين ، اللذين وضعهما أرسطو أساساً للفكر المنطقي ، أعني المبدأين :

كل قضية هي إما صادقة وإما كاذبة

القضية لا تكون صادقة وكاذبة معاً

قد يوهم أن الصورتين ، اللتين نستدل على صحتهما ، بواسطة جداول الصدق، يقومان مقام المبدأين التقليديين . وهذا خطأ ، لأن حساب جداول الصدق يفترض ضمنياً سابق التسليم بهما .

٣. مبدأ نفي النفي :

⊨ ¬ ¬ ب ↔ ب

٤. مبدأا دي مورغن De Morgan :

⊨ ¬ (ب ∧ ج) ↔ ¬ ب ∨ ¬ ج

⊨ ¬ (ب ∨ ج) ↔ ¬ ب ∧ ¬ ج

٥. مبدأ عكس النقيض :

⊨ (ب ← ج) ↔ (¬ ج ← ¬ ب)

٦. حالة الوضع :

⊨ (ب ← ج) ∧ ب ← ج

٧. حالة الرفع :

⊨ (ب ← ج) ∧ ¬ ج ← ¬ ب

٨. مبدأ التوسيع :

⊨ ب ← ب ∨ ج

٩. مبدأا التبسيط :

⊨ ب ∧ ج ← ب

⊨ ب ∧ ج ← ج

خصائص الروابط

١. التبادل .

يقال عن رابط ما « ر٢ » ان له خاصة التبادل ، فقط إذا كانت الصورة « (ب ر٢ ج) ↔ (ج ر٢ ب) » صحيحة . فروابط الوصل والفصل والتشارط هي كذلك :

⊨ ب ∧ ج ↔ ج ∧ ب

⊨ ب ∨ ج ↔ ج ∨ ب

⊨ (ب ↔ ج) ↔ (ج ↔ ب)

٢. التجميع .

يقال عن الرابط « ر٢ » انه تجميعي ، فقط إذا صحت الصورة

« (ب ر٢ (ج ر٢ د)) ↔ ((ب ر٢ ج) ج ر٢ د) » . الرابطان التاليان يتسمان بهذه الخاصة :

⊨ ب ∧ (ج ∧ د) ↔ (ب ∧ ج) ∧ د

⊨ ب ∨ (ج ∨ د) ↔ (ب ∨ ج) ∨ د

بسبب هذه الخاصة ، يجوز لنا التخلي عن الأقواس ، في القضايا المتصلة والمنفصلة ، التي نختصرها هكذا : ب ∧ ج ∧ د ، ب ∨ ج ∨ د .

٣. التعدي .

يكون الرابط « ر٢ » متعدٍ ، في حال صحة « (ب ر٢ ج) ∧ (ج ر٢ د) ← (ب ر٢ د) »

⊨ (ب ∧ جـ) ∧ (جـ ∧ د) ← ب ∧ د

⊨ (ب ← جـ) ∧ (جـ ← د) ← (ب ← د)

⊨ (ب ↔ جـ) ∧ (جـ ↔ د) ← (ب ↔ د)

٤. التوزيع .

يُقال عن الرابط « رء٢ » إنه يتوزع بالنسبة للرابط « ري٢ » ، فقط إذا صحت الصورة « (ب رء٢ (جـ ري٢ د)) ↔ ((ب رء٢ جـ) ري٢ (ب رء٢ د)) » ، وفي هذا ، لا يفترض من الرابطين « رء٢ » و « ري٢ » أن يكونا مختلفين . كما هي الحال مثلا مع الوصل ، الذي يتوزع بالنسبة إلى نفسه :

⊨ ب ∧ (جـ ∧ د) ↔ (ب ∧ جـ) ∧ (ب ∧ د)

⊨ ب ∧ (جـ ∨ د) ↔ (ب ∧ جـ) ∨ (ب ∧ د)

⊨ ب ∨ (جـ ∧ د) ↔ (ب ∨ جـ) ∧ (ب ∨ د)

⊨ ب ∨ (جـ ∨ د) ↔ (ب ∨ جـ) ∨ (ب ∨ د)

⊨ ب ∨ (جـ ← د) ↔ ((ب ∨ جـ) ← (ب ∨ د))

⊨ ب ∨ (جـ ↔ د) ↔ ((ب ∨ جـ) ↔ (ب ∨ د))

⊨ (ب ← (جـ ∧ د)) ↔ (ب ← جـ) ∧ (ب ← د)

⊨ (ب ← (جـ ∨ د)) ↔ (ب ← جـ) ∨ (ب ← د)

⊨ (ب ← (جـ ← د)) ↔ ((ب ← جـ) ← (ب ← د))

⊨ (ب ← (جـ ↔ د)) ↔ ((ب ← جـ) ↔ (ب ← د))

٥. الانعكاس .

الرابط الانعكاسي « ر٢ » هو الذي يصح فيه « ب ر٢ ب »

⊨ ب ← ب

⊨ ب ↔ ب

٦. تكافؤ القوة .

يكون الرابط « ر٢ » متكافىء القوة ، فقط إذا صحت الصورة « ب ↔ (ب ر٢ ب) » :

⊨ ب ↔ ب ∧ ب

⊨ ب ↔ ب ∨ ب

تلازم الروابط

١. ⊨ ب ∧ جـ ↔ ¬ (¬ ب ∨ ¬ جـ)

٢. ⊨ ب ∧ جـ ↔ ¬ (ب ← ¬ جـ)

٣. ⊨ ب ∨ جـ ↔ ¬ (¬ ب ∧ ¬ جـ)

٤. ⊨ ب ∨ جـ ↔ ¬ ب ← جـ

٥. ⊨ (ب ← جـ) ↔ ¬ (ب ∧ ¬ جـ)

٦. ⊨ (ب ← جـ) ↔ ¬ ب ∨ جـ

٧. ⊨ (ب → جـ) ↔ (جـ ← ب)

٨. ⊨ (ب ↔ جـ) ↔ (ب → جـ) ∧ (ب ← جـ)

٩. ⫤ (ب ↑ ج) ↔ ⌐ (ب ∧ ج)

١٠. ⫤ (ب ↓ ج) ↔ ⌐ (ب ∨ ج)

١١. ⫤ (ب ⤙ ج) ↔ ⌐ (ب ← ج)

١٢. ⫤ (ب ⤚ ج) ↔ ⌐ (ب → ج)

١٣. ⫤ (ب ⤛ ج) ↔ ⌐ (ب ↔ ج)

١٤. ⫤ (ب ⤛ ج) ↔ (ب ⤚ ج) ∨ (ب ⤙ ج)

١٥. ⫤ ⌐ ب ↔ ب ↑ ب

١٦. ⫤ ⌐ ب ↔ ب ↓ ب

نعرف انه ، في الصور التشارطية الصحيحة ، بما أن الطرفين لهما جدول الصدق نفسه ، يمكن ان ينوب كل منهما عن الآخر . ويؤكد لنا التلازم ٩–١٣ ما أشرنا إليه في الفصل السابق، وهو ان الروابط «↑ ، ↓ ، ⤙ ، ⤚ ، ⤛» تتلازم، على التوالي ، مع سلب الروابط «∧ ، ∨ ، ← ، → ، ↔». وبالتالي ، يمكن الاستغناء عنها ، وتأدية كل منها ، بواسطة احد الروابط الأخيرة مع رابـط السلب . وفوق ذلك ، نتحقق ، بالاستعانة بقائمة التلازم وبمسألتي الابدال والمناب ، ان بعض الروابط تدخل على الصورة في تراكيب مختلفة ، وتكون ، في كل تركيب ، متلازمة مع رابط ما ، بحيث انها تستوعب كل الروابط . فمن هذه الروابط ، مثلا ، رابطا الشرط والسلب. إذ بالنسبة إلى تلازمهما مع الوصل والفصل والشرط المعكوس ، فإننا نستمده مباشره من قائمة التلازم :

ب ∧ ج ↔ ¬ (ب → ¬ ج) التلازم ٢

ب ∨ ج ↔ (¬ ب → ج) التلازم ٤

(ب → ج) ↔ (ج → ب) التلازم ٧

أما تلازمهما مع التشارط أي :

(ب ↔ ج) ↔ ¬ ((ج → ب) → ¬ (ب → ج))

فنتوصل إليه بالتدرج الآتي :

من التلازم ٨ :

(ب ↔ ج) ↔ (ب → ج) ∧ (ب → ج)

نحصل ، بإنابة « ج → ب » مناب « ب → ج » وفقاً للتلازم ٧ ، على :

(ب ↔ ج) ↔ (ج → ب) ∧ (ب → ج)

ثم ، بإبدال « ج → ب » مكان « ب » و « ب → ج » مكان « ج » في التلازم ٢ ، يتأتى لنا التلازم الجديد :

(ج → ب) ∧ (ب → ج) ↔ ¬ ((ج → ب) → ¬ (ب → ج))

فاستناداً إليه ، ننيب « ¬ ((ج → ب) → ¬ (ب → ج)) » مناب « (ج → ب) ∧ (ب → ج) » في الصورة السابقة ، ونحصل على المطلوب .
من المتلازمات المذكورة، يتضح لنا ان الرابطين « → » و« ¬ » ، يمكن ان ينوبا معاً عن الروابط الموجودة في الطرف الأول من التلازم ، وبالتالي عن سائر الروابط . أي اننا نستطيع ، إذا ما اتخذنا « → » و« ¬ » رابطين اساسيين ،

أن نعرّف بهما الروابط الأخرى . ففي هذه الحالة ، تكون «ب ∧ ج» ، «ب ∨ ج» الخ ... بمثابة كتابة مختصرة لِ «¬ (ب → ¬ ج)» ، «¬ ب → ج» الخ ...

هناك رابطان ، هما مانع الوصل ومانع الفصل ، ينفردان عن البقية ، بأن كل واحد منهما يؤدي وحده رابط السلب . والحال ان سلب كل منهما يتلازم مع الوصل أو مع الفصل . فبما أن «∧» و«¬» أو «∨» و«¬» يؤديان الروابط الأخرى ، يمكن الاكتفاء إما بمانع الوصل وإما بمانع الفصل[1]، لتأدية باقي الروابط . بالنسبة لمانع الوصل ، نحصل على التلازم الآتي :

ب ∧ ج ↔ ((ب ↑ ج) ↑ (ب ↑ ج))

ب ∨ ج ↔ ((ب ↑ ب) ↑ (ج ↑ ج))

(ب → ج) ↔ (ب ↑ (ج ↑ ج))

(ب ↔ ج) ↔ (((ب ↑ (ج ↑ ج)) ↑ (ج ↑ (ب ↑ ب))) ↑
((ب ↑ (ج ↑ ج)) ↑ (ج ↑ (ب ↑ ب))))

١٠. الصور السالمة *

رأينا ، في الفصل السابق ، ان التلازم الحاصل بين الروابط ، يخولنا أن نؤدي صورة ما بصور أخرى مختلفة . فمن بين هذه ، تتميز تلك التي تدعى «الصور السالمة » ، إذ تقدم طريقة مختصرة ، للبت في صحة وتناقض الصور ، وفوائد أخرى جمة .

الصورة السالمة المتصلة

نفهم بالصورة المنفصلة الأولية ف ، المنفصلة التي كل جزء منها اما متغير وإما متغير مسلوب ، ومنها :

ب ∨ ج

~ ب ∨ ج ∨ د

وكذلك ، حتى لا نستثني بعض الحالات الخاصة ، نعتبر بين المنفصلات الأولية ، تلك التي تحتوي على متغير واحد فقط ، مثل :

ب ، ~ ج .

بناء على هذا ، نطلق اسم « الصورة السالمة المتصلة » ، على الصورة :

ف$_1$ ∧ ف$_2$ ∧ ... ∧ ف$_م$ (م ≥ ١)

حيث كل ف$_ي$ هي بدورها صورة منفصلة أولية . بقول آخر ، فالصورة السالمة المتصلة هي وصل لصور منفصلة أولية . وأمثلتها لا تقتصر على هذه الأنواع :

* قراءة هذا الفصل غير ضرورية لمتابعة ما يأتي . ففائدته تقوم على الناحية التقنية فقط .

(ب ∨ ¬ ج) ∧ (¬ ب ∨ ¬ ج)

(¬ ب ∨ ج ∨ ¬ د) ∧ (ب ∨ ¬ ب ∨ ¬ ج) ∧ (¬ ج ∨ د)

بل إن التعريفين السابقين يشملان أيضاً الصور :

ب ∧ ¬ ب ∧ ج	عندما كل فِ تحتوي على متغير واحد
ب ∨ ¬ ج ∨ ¬ د	عندما م = ١
¬ ب	عند حصول الشرطين معاً

رغم ان هذه تفتقر إلى رابط الوصل او رابط الفصل او كل منهما .

يمكن تحويل كل صورة قضية إلى صورة سالمة متصلة ، اعني ايجاد صورة سالمة متصلة ، متلازمة مع الأولى . ويتم ذلك بالاستعانة بالمبادىء التالية ، التي سبق لنا التعرف على صحتها ، وهي :

١. التلازم ما بين « ¬ ، ∧ ، ∨ » والروابط الأخرى، للتخلص من الأخيرة.

٢. مبدأا دي مورغن ، لازالة روابط السلب الواقعة خارج الأقواس .

٣. مبدأ نفي النفي ، لإزالة روابط السلب المتكررة .

٤. توزيع الفصل بالنسبة إلى الوصل ، أي :

⊢ ب ∨ (ج ∧ د) ↔ (ب ∨ ج) ∧ (ب ∨ د)

للحصول على وصل منفصلات .

٥. تكافؤ القوة في الوصل والفصل ، لالغاء الصور المتكررة .

٦. خاصتا التبادل والتجميع ، لحذف الأقواس وتغيير ترتيب الصور .

إليك نمطاً يوضح ذلك :

مثل I : ((ب ∨ جـ) ← جـ) ∧ ⌐ (د ∧ جـ)

١. (⌐ (ب ∨ جـ) ∨ جـ) ∧ ⌐ (د ∧ جـ) مناب ←

٢. ((⌐ ب ∧ ⌐ جـ) ∨ جـ) ∧ ⌐ (د ∧ جـ) دي مورغن

٣. ((⌐ ب ∧ ⌐ جـ) ∨ جـ) ∧ (⌐ د ∨ ⌐ جـ) دي مورغن

٤. (جـ ∨ (⌐ ب ∧ ⌐ جـ)) ∧ (⌐ د ∨ ⌐ جـ) التبادل

٥. ((جـ ∨ ⌐ ب) ∧ (جـ ∨ ⌐ جـ)) ∧ (⌐ د ∨ ⌐ جـ) التوزيع

٦. (⌐ ب ∨ جـ) ∧ (جـ ∨ ⌐ جـ) ∧ (⌐ جـ ∨ ⌐ د) التبادل والتجميع

فبما اننا نستطيع ان نحول كل صورة قضية إلى صورة سالمة متصلة متلازمة معها، فالبت في صحة القضايا يعود إلى إيجاد طريقة ، تمكننا من أن نقرر متى تكون الصورة السالمة المتصلة صحيحة . لوفاء هذا الغرض ، تسهل علينا البحوث السابقة التحقق من أن :

١. «ب ∨ ⌐ ب» هي صحيحة

٢. وان الصورة ، الحاصلة عن ربط صورة صحيحة مع أية صورة برابط الفصل هي صحيحة ، أي وفقاً للمسألة ١١، ٨ :

$$T \dashv\models \Phi \vee T$$

٣. وانه، إذا كانت Φ صحيحة و Ψ صحيحة ، فالمتصلة Φ ∧ Ψ تكون بدورها صحيحة ، أي :

⫤ Φ و ⫤ Ψ فقط إذا ⫤ Φ ∧ Ψ

لان المتصلة ، حتّى تصدق ، تتطلب صدق الطرفين معاً .

وبالتالي ، نستخلص من هذه المسائل ، ان السالمة المتصلة تصح عندما كل واحدة من منفصلاتها الأولية تحتوي على متغير وسلب هذا المتغير معاً .

مثل II : ¬ (ب → ج) ∨ ((ب ∧ د) → (ج ∧ د))

١. (ب ∧ ¬ ج) ∨ (¬ (ب ∧ د) ∨ (ج ∧ د))   مناب →

٢. (ب ∧ ¬ ج) ∨ ((¬ ب ∨ ¬ د) ∨ (ج ∧ د))   دي مورغن

٣. (ب ∧ ¬ ج) ∨ ((¬ ب ∨ ¬ د ∨ ج) ∧ (¬ ب ∨ ¬ د ∨ د))
التوزيع والتجميع

٤. ((ب ∧ ¬ ج) ∨ (¬ ب ∨ ¬ د ∨ ج)) ∧ ((ب ∧ ¬ ج) ∨
(¬ ب ∨ ¬ د ∨ د))   التوزيع

٥. ((¬ ب ∨ ¬ د ∨ ج) ∨ (ب ∧ ¬ ج)) ∧ ((¬ ب ∨ ¬ د ∨ د) ∨
(ب ∧ ¬ ج))   التبادل

٦. ((¬ ب ∨ ¬ د ∨ ج ∨ ب) ∧ (¬ ب ∨ ¬ د ∨ ج ∨ ¬ ج)) ∧
((¬ ب ∨ ¬ د ∨ د ∨ ب) ∧ (¬ ب ∨ ¬ د ∨ د ∨ ¬ ج))
التوزيع

٧. (ب ∨ ¬ ب ∨ ج ∨ ¬ د) ∧ (¬ ب ∨ ج ∨ ¬ ج ∨ ¬ د) ∧
(ب ∨ ¬ ب ∨ د ∨ ¬ د) ∧ (¬ ب ∨ ¬ ج ∨ د ∨ ¬ د)
التجميع والتبادل

هذه السالمة المتصلة هي صحيحة ، لأن كل واحدة من منفصلاتها الأولية تحتوي على متغير قضية وسلبه . فإذن الصورة الأصلية هي أيضاً صحيحة .

مثل III : ¬ ب ← (ب ← ج)

١. ¬ ¬ ب ∨ (¬ ب ∨ ج) — مناب ←

٢. ب ∨ (¬ ب ∨ ج) — نفي النفي

٣. ب ∨ ¬ ب ∨ ج — التجميع

يتبين لنا من وجود « ب ∨ ¬ ب » أن السالمة المتصلة، التي تحتوي فقط على منفصلة أوليّة واحدة ، هي صحيحة .

الصورة السالمة المنفصلة :

التحويل إلى الصورة السالمة المتصلة ، قدم لنا طريقة للبت في صحة الصور ؛ أما البت في تناقضها ، فيحصل بالاستعانة بالصورة السالمة المنفصلة .

إذا فهمنا بالمتصلة الأولية ، الصورة المتصلة ، التي كل جزء منها إما متغير قضية أو سلب هذا المتغير ، فإننا نعرّف السالمة المنفصلة ، بأنها الصورة :

$و_{1} \lor و_{2} \lor \dots \lor و_{ن} \qquad ن \geq 1$

حيث كل متغير ماورائي « $و_{ي}$ » يشير بدوره إلى صورة متصلة أولية . فمن الأمثلة عليها :

(ب ∧ ¬ ج) ∨ (ب ∧ ¬ ب ∧ ج)

(¬ ب ∧ ج ∧ د) ∨ (ب ∧ ¬ ج ∧ د ∧ ¬ د) ∨ (ج ∧ ¬ ج ∧ د)

وكذلك :

ب ∧ ¬ ج ∧ د

¬ ب ∨ د

¬ ج

فلبت في تناقض السالمة المنفصلة ، تلي لنا المهمة المسألتان الآتيتان :

١. «ب ∧ ⌐ ب» هي متناقضة

٢. إذا ربطنا برابط الوصل، صورة متناقضة مع أية صورة ، فالصورة الحاصلة هي أيضاً متناقضة ، أي :

⊥ ∧ Φ ⫤⊨ ⊥ .

منهما نتحقق ان السالمة المنفصلة تكون متناقضة ، في حال احتواء كل متصلة أولية فيها على متغير وسلب هذا المتغير ، أي على «ب ∧ ⌐ ب» .

أما الحصول على السالمة المنفصلة ، فيتم باتباعنا نفس الطريقة التي سرنا عليها للحصول على السالمة المتصلة . مع الفرق بأنه ، بدل التوزيع السابق ، نوزع في هذه الحال ، الوصل بالنسبة إلى الفصل ، أي :

⫤ ب ∧ (ج ∨ د) ↔ (ب ∧ ج) ∨ (ب ∧ د)

لنعتبر الصورة :

مثل IV : ⌐ ((ب ∧ (ج ∨ د)) ← (⌐ ب ← د))

١. (ب ∧ (ج ∨ د)) ∧ ⌐ (⌐ ب ← د) — مناب ←

٢. (ب ∧ (ج ∨ د)) ∧ (⌐ ب ∧ ⌐ د) — مناب ←

٣. ((ب ∧ ج) ∨ (ب ∧ د)) ∧ (⌐ ب ∧ ⌐ د) — التوزيع

٤. (⌐ ب ∧ ⌐ د) ∧ ((ب ∧ ج) ∨ (ب ∧ د)) — التبادل

٥. ((⌐ ب ∧ ⌐ د) ∧ (ب ∧ ج)) ∨ ((⌐ ب ∧ ⌐ د) ∧ (ب ∧ د)) — التوزيع

٦. (ب ∧ ¬ ب ∧ ج ∧ ¬ د) ∨ (ب ∧ ¬ ب ∧ د ∧ ¬ د)

التجميع والتبادل

فكل واحدة من المتصلتين الأوليتين تحتوي على متغير قضية وسلبه معاً ، فإذن هما متناقضتان . وبالتالي السالمة المنفصلة بأجمعها متناقضة .

الصور السالمة التامة :

عندما تحتوي كـــل منفصلة أولية من السالمة المتصلة ، على كل واحد من المتغيرات ، التي توجد في الصورة الأصلية ، يُقال عن الصورة السالمة المتصلة أنها تامة . طبقاً لهذا التعريف ، تكون ، مثلا ، الصورة السالمة المتصلة :

(ب ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج)

غير تامة ، إذ أولى منفصلتيها ينقصها « ج » ، والثانية « د » . ومع ذلك ، فاننا نستطيع أن نجعل كل سالمة متصلة ، تامة . وبالفعل ، استناداً إلى التلازم :

فء ⫤⊨ **فء** ∨ (ب ∧ ¬ ب)

نضيف إلى **فء** الصورة **ب** ∧ ¬ **ب**، حيث نختار **ب** من المتغيرات الناقصة لـ **فء** ، ثم نوزع الفصل بالنسبة إلى الوصل ، فنحصل على :

(**فء** ∨ **ب**) ∧ (**فء** ∨ ¬ **ب**) .

ونكرر العملية ، حتى تضم كل منفصلة أولية ، كل واحدة من المتغيرات الموجودة في الصورة الأصلية . فبالنسبة للمثل المذكور ، يجري التتميم هكذا :

مثل V : (ب ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج)

١. ((ب ∨ د) ∨ (ج ∧ ¬ ج)) ∧ ((ب ∨ ¬ ج) ∨ (د ∧ ¬ د))

فء ⫤⊨ فء ∨ (ب ∧ ¬ ب)

٢. ((ب ∨ د ∨ ج) ∧ (ب ∨ د ∨ ¬ ج)) ∧ ((ب ∨ ¬ ج ∨ د) ∧
(ب ∨ ¬ ج ∨ ¬ د) التوزيع

٣. (ب ∨ ج ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج ∨ د) ∧
(ب ∨ ¬ ج ∨ ¬ د) التبادل والتجميع

٤. (ب ∨ ج ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج ∨ د) ∧ (ب ∨ ¬ ج ∨ ¬ د)
تكافؤ القوة

من الواضح انه يمكن ، وفقاً لهذه الطريقة ، أن ندخل على صورة ما حتى متغيرات غير واردة فيها .

تقابل السالمة المتصلة التامة ، السالمة المنفصلة التامة ، وهي التي كل متصلة أولية فيها ، تحتوي على كل متغير من المتغيرات الواردة في الصورة الأصلية . اما التلازم ، الذي نعتمد عليه في عملية التتميم فهو :

وء ⫤⊨ وء ∧ (ب ∨ ¬ ب)

حيث نختار ب من المتغيرات الناقصة لِـ وء .

من فوائد الصور السالمة التامة ، انها قد تعين احياناً على اختصار الصورة الأصلية . فبعد حصولنا على السالمة التامة ، نستخرج إما «ب ∧ ¬ ب» إذا كانت الصورة متصلة سالمة، وإما «ب ∨ ¬ ب» في حال المنفصلة . ونحذفهما

طبقاً للتلازمين السابقين . فمثلا « ب ∧ (ب ∨ ج) » نختصرها على النحو الآتي :

١. (ب ∨ (ج ∧ ¬ ج)) ∧ (ب ∨ ج)   فء ⫤⊨ فء ∨ (ج ∧ ¬ ج)

٢. (ب ∨ ج) ∧ (ب ∨ ¬ ج) ∧ (ب ∨ ج)   التوزيع

٣. (ب ∨ ج) ∧ (ب ∨ ¬ ج)   تكافؤ القوة

٤. ب ∨ (ج ∧ ¬ ج)   التوزيع

٥. ب   فء ⫤⊨ فء ∨ (ج ∧ ¬ ج)

« ب » هي إذن الصورة المختصرة لـ « ب ∧ (ب ∨ ج) » .

تمارين :

I حول الصور التالية إلى صورها السالمة المتصلة ، وبت في صحتها :

١. (ب ← ج) ∨ (ج ← ب)

٢. ((ب ← ج) ← ب) ← ب

٣. ¬ (ب ∧ ¬ ج) ← (ج ← ب)

٤. (ب ← ج) ∨ ب

٥. (ب ← د) ∧ (ج ← د) ∧ ¬ د ← ¬ ب ∨ ¬ ج

II حول الصور التالية إلى صورها السالمة المنفصلة ، وبت في تناقضها

١. ب ∧ (ب ← ج) ∧ ¬ ج

٢. ¬ (ب ∧ ج) ∧ (د ← ¬ ب)

٣. (ب ← (ج ← د)) ∧ ب ∧ ج ∧ ¬ د

٤. ب ∧ ¬ ج ∧ ¬ د ∧ ¬ (ج ← د)

٥. (ب ∨ ¬ ج ∨ د) ∧ ¬ ب ∧ ج

***



حساب القضايا

١١. ما هو الحساب

في الباب السابق ، بحثنا في الصيغ وتركيبها ، من حيث الصدق والكذب ؛ ووضعنا طرقاً للاستنتاج ، تعتمد على القيم الصدقية .فكان اهتمامنا موجهاً إلى مدلولات الرموز ، التي تتألف منها لغة القضايا ، وتركزت ابحاثنا على جانب معين من اللغة ، اطلقنا عليه اسم « علم الدلالة » .

من جهة أخرى ، يعالج علم النحو اللغة ، دون الالتفات إلى المعنى ، إذ يضع قواعد صورية، لصياغة ألفاظ من ألفاظ أخرى، آخذاً في اعتباره فقط الألفاظ ، من حيث هي اشكال تخضع للتراكيب المختلفة . ففي اللغة العربية ، على سبيل المثال ، نصوغ اسم الآلة « مغرفة » من المصدر « غرف » ، مع جهلنا للمعنى ، وذلك قياساً على وزن « مفعلة » فقط . وكذلك ، نركب الجملة الفعلية « طارت العنقاء » ، اذا اتبعنا القاعدة التي تنص على تركيب الجملة الفعلية من فعل أولا ، ثم اسم ، وعرفنا أن « طارت » هي فعل ، و « العنقاء » هي اسم ، دون أدنى ادراك للمعاني . فهذا الجانب ، أي علم النحو ، هو الذي سوف نقصده الآن بالنسبة إلى اللغة الرمزية . وتحت باب النحو ، لن نتناول قواعد الصياغة فحسب ، كما يُتوقع من المفهوم الحصري لهذا العلم ، بل أيضاً قواعد الاستنباط ، لأنها هي كذلك صورية بحت ، لا تهتم بالمضمون والمعاني . من وجهة النظر هذه ، يصبح المنطق عبارة عن مواضعات ، أو قواعد موضوعة لمعالجة أشكال ورموز ، لا يُفترض أن نعرف عنها، سوى انقسامها إلى اصناف متنوعة . مثل هذا النسق ، الذي يقوم على أشكال أساسية ، وقواعد تحدد كيفية الانطلاق من الاشكال الاساسية إلى أشكال أخرى ، يُسمى « حساباً » .

إليك نمطاً للحساب ، يضبط هذه المفاهيم ، ويظهر على الأخص ، عدم حاجة الرموز إلى المدلول في هذه العمليات :

I الاشكال البسيطة : ■ ، ●

II الاشكال الأساسية : ■

III القواعد :

ح١ : س ⇐ س ●

ح٢ : س ⇐ ■ س ■

فالرقم I يشير إلى العناصر الأولية ، التي يتناولها التركيب ، وهي الشكلان ■ و ●

بينما الرقم II يحدد الاشكال، التي يمكن الابتداء بها ، وهي محصورة هنـا بالشكل ■ فقط ؛ وعليه، لا يجوز أن نبدأ بالشكل ● أو أي شكل آخر مركب. في III ، « س » هو متغير للاشكال المركبة من ■ و ● ، الممكن الحصول عليها من هذا الحساب . أما السهم المزدوج « ⇐ » ، الذي هو رمز القاعدة ، فيشير إلى الانتقال من شكل إلى آخر . ومع أن العادة جرت بالتعبير عنه بالأدوات نفسها التي تستعمل للشرط ، أي « إذا ... ف ... » ، فهو يختلف تماماً عن الرابط المذكور ، وكذلك عن اللزوم ، لانه ، بعكسهما ، لا علاقة له بالصدق والكذب ، ولا يؤلف قضية خبرية ، بل هو من باب الامر . ولذلك يجب تأديته بالالفاظ « إذا ... فليكن ... ». ففي لعبة الشطرنج، مثلا، وهي ضرب من الحساب ، لا يجوز نعت القاعدة ، التي تأمر بنقل حجر الحصان على هيئة زاوية ، لا بالكذب ولا بالصدق ، لأن من أراد المشاركة في اللعب ، فله إما أن يتقيد بالتعليمات التي أقرها واضع الشطرنج ، أو أن يرفض اللعبة أصلا . ومن هذا الشرح ، يتبين أن استعمالنا لكلمة «قاعدة» ، مغاير للمصطلح « مبدأ » ، الذي اطلقناه على بعض القضايا الصحيحة . فلزم التنبه لذلك ، خصوصاً ان

الترادف بين تلك الكلمات ، كثير الشيوع . إذن ، القاعدة هي أمر أو توجيه له الصورة العامة الآتية :

$$ش_1 ، ش_2 ، .... ، ش_ن ← ت$$

حيث $ش_1$ ، $ش_2$ ، ... ، $ش_ن$ ، ت هي متغيرات ماورائية للاشكال المركبة من اشكال بسيطة ومتغيرات شيئية. وفي هذه الصورة ، إذا لم نستثن ن = ١ ، فانه يمكن ضم الاشكال الاساسية إلى القواعد ، واعتبار II ، في هذه الحالة ، قاعدة ، نكتبها هكذا :

$$← ■$$

اي ضع الشكل ■ دون افتراض سابق .

النسق ، الذي اقترحناه ، يخولنا أن نركب اشكالا جديدة من الاشكال البسيطة . ونسمي هذا التركيب ، المضبوط على القواعد ، اشتقاقاً . فالعملية التالية ، مثلا ، هي اشتقاق وفقاً للحساب المذكور :

.١	■	II
.٢	■●	$ح_1$ ؛ ١
.٣	■●●	$ح_1$ ؛ ٢
.٤	■■●●■	$ح_2$ ؛ ٣
.٥	■■●●■●	$ح_1$ ؛ ٤

حيث الرموز الموجودة عن يسار الاشكال ، تشير ، الواقعة منها قبل « ؛ » إلى القواعد التي استُعملت ، والتي بعد « ؛ » إلى السطور التي طُبقت عليها القواعد . من هذا التدرج ، يظهر لنا أن الشكل ■■■●●■ هو قابل

للاشتقاق . فللدلالة على الاشتقاق عامة ، نستعمل الرمز « ⊢ » ، ونرفقه بعلامة تشير إلى الحساب « ح » الذي نسير عليه . فنكتب :

$\vdash_{\text{ح}}$ ت

لنقول ان الشكل ت قابل للاشتقاق في الحساب « ح » .

ثمة اشكال ، لا يمكن اشتقاقها بواسطة القواعد الموضوعة ، إلا بعد افتراض اشكال أخرى . فمثلا ، الشكل ■■■●●■ يستحيل الحصول عليه ، لأنه يحتوي على عدد مزدوج من المربعات ، والقواعد لا تسمح إلا بعدد فرد منها. ولكن يمكن اشتقاقه، إذا وضعنا الشكل ■■ كفرضية اضافية ، وذلك يتم على النحو الآتي :

١.	■■	فرضية
٢.	■■●	$ح_1$ ؛ ١
٣.	■■●●	$ح_1$ ؛ ٢
٤.	■■■●●■	$ح_2$ ، ٣

وعندها نرمز إلى هذه العملية بِـ :

■■ $\vdash_{\text{ح}}$ ■■■●●■

في وجه عام ، إذا كان الشكل ت قابلا للاشتقاق في الحساب «ج» ، من الفرضيات $ش_1$ ، $ش_2$ ، ... ، $ش_ن$ ، فإننا نكتب :

$ش_1$ ، $ش_2$ ، ... ، $ش_ن$ $\vdash_{\text{ح}}$ ت

تمارين :

I اشتق الأشكال الآتية :

١. ■ ■ ■ ● ■ ● ■ ●

٢. ■ ■ ■ ● ● ●

٣. ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

II استقرىء من الاشكال التالية ، صفة مشتركها تجعلها غير قابلة للاشتقاق في الحساب ح :

■ ● ■

● ■ ■ ■ ●

■ ■ ● ■ ■ ● ■

■ ■ ■ ● ■ ■ ■ ■

III أقم حساباً يسمح باشتقاق الاشكال التالية فحسب :

■ ●

● ■ ■ ●

■ ● ■ ■ ● ■

● ■ ■ ● ■ ■ ● ■

■ ● ■ ■ ● ■ ■ ● ■ ■

● ■ ■ ● ■ ■ ● ■ ■ ● ■ ■

... الخ

١٢. صياغة لغة منطق القضايا

قد سبق لنا أن مارسنا تركيب القضايا والصور ، على شتّى درجات التعقيد . ولكن ذلك كـــان يحصل بطريقة غير دقيقة ، تستند إلى العادة المكتسبة من التمرّس باللغات الطبيعية . أما الحساب التالي ، فيقدم وسيلة فعالة ، تضبط كيفية التركيب ، على وجه محدّد وآلي .

I الرموز البسيطة :

– متغيرات قضايا : ب ، جـ ، د ، ...

– رابط أحادي : $\neg$.

– روابط ثنائية : $\vee$ ، $\wedge$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$.

– أقواس : (،) .

II الرموز الأساسية : ب ، جـ ، د ، ...

III القواعد :

صغ١ : $\Phi \Rightarrow \neg\Phi$

صغ٢ : $\Phi , \Psi \Rightarrow (\Phi \vee \Psi)$

صغ٣ : $\Phi , \Psi \Rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$

صغ٤ : $\Phi , \Psi \Rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$

صغ٥ : $\Phi , \Psi \Rightarrow (\Phi \leftrightarrow \Psi)$

نكتفي هنا بالروابط الخمسة المهمة ، وقد كان من اليسير توسيع اللغة ، بحيث تشمل سائر الروابط ، وذلك بإضافة الروابط الباقية على الرموز البسيطة ، وإدخال قواعد لها على هذه الصورة : Φ ، Ψ ⇐ (Φ ر؟ Ψ) .

بواسطة الحساب الموضوع ، يتسنى لنا اشتقاق اشكال لغوية دون غيرها . فهذه الاشكال القابلة للاشتقاق تعادل ، في منطق القضايا ، ما سميناه بصور القضايا. إليك مثلا على اشتقاق الصورة « (⌐ (ب ∧ ⌐ ج) ← ج) »:

١. ب — II

٢. ج — II

٣. ⌐ ج — صغ$_{1}$ ؛ ٢

٤. (ب ∧ ⌐ ج) — صغ$_{3}$ ؛ ١، ٣

٥. ⌐ (ب ∧ ⌐ ج) — صغ$_{1}$ ؛ ٤

٦. (⌐ (ب ∧ ⌐ ج) ← ج) — صغ$_{4}$ ؛ ٥، ٢

وعلى النمط نفسه ، نتدرج في اشتقاق الصور ، بادئين بالرموز البسيطة ، حتى ننتهي إلى التركيب المطلوب .

إذا ما قارنا بين اللغة الرمزية واللغة العربية ، نجد أن الرموز البسيطة هي بمثابة الألفباء ، والصور هي مقابل الجمل والألفاظ الموزونة على المفاعيل . أما الكلم الخارج عن الصرف والنحو ، أمثال « قَتَلُ » و « زيد على في » ، فتساوقه ، في لغة المنطق ، الرموز التي يمتنع اشتقاقها بواسطة الحساب ، ومنها « (» ، « ⌐ ب ∧ » ، «((ب ∧ ج)) » ، « ⌐ ج د » الخ ...

يجدر التنبيه هنا ، إلى أن كتابة الصور المختصرة ، التي أخذنا بها في السابق ، مثل :

ب ∧ جـ ← جـ

¬ ¬ ب ∨ جـ ↔ ¬ جـ ∧ ب

الخ ...

تصبح مخالفة لقواعد الصياغة ، إذا تمسكنا بالحساب الموضوع . ولكن ، كما فعلنا قبلا ، يمكننا استخدام المواضعات الاضافية ، التي تجيز لنا التوفير من الأقواس .

تمرين :

اشتق الصيغ الآتية :

١. ((¬ ¬ ب ↔ جـ) ∨ د) ← (¬ جـ ← د)

٢. (((ب ∧ جـ) ∧ د) ∧ هـ)

٣. ((ب ∨ ¬ جـ) ↔ ¬ ¬ (¬ ب ← جـ))

١٣. النسق الأكسيومي

من المعروف أنه ، قبل اليونان ، لم تكن الهندسة سوى مجموعة من الحقائق المتفرقة ، تعبر عن خبرات نافعة في قياس الأراضي والبناء . ولكنها ، كانت تفتقد الاساس المنطقي ، الذي يجعل منها علماً بالمعنى الحصري . ولم يبدأ تنسيق الهندسة إلا مع فيثاغورس ، وتطور من بعده ، حتّى بلغ كماله في « أصول » اقليدس . وكان يقوم ذلك النسق ، على وضع بعض القضايا الهندسية في المقدمة، باعتبار انها بديهية واضحة، تفرض ذاتها على العقل فلا تفسح مجالاً للريب أو التبرير ، ومن ثم بالتدريج ، على استنباط سائر الحقائق الهندسية منها . لكن ، مع ظهور الهندسة اللاإقليدية والفروع الرياضية الجديدة ، أصبح من العبث فرض الوضوح على القضايا التي تتصدر النسق ، إذ هذه الفروع ضمت ، بين المسلمات ، قضايا تبدو بعيدة عن الوضوح المزعوم ، إن لم تكن مخالفة له . فمنذ هلبرت Hilbert ، تحول البحث إلى النظر في خصائص جديدة تعود إلى النسق ، منها التمامية وعدم التناقض واستقلال المسلمات . هذه الأمور ، وما يدور حولها ، هي التي سوف نستقصيها ، ضمن إطار المنطق .

يحتوي النسق الأكسيومي عامة على قسمين أساسيين ، يؤلف كل واحد منهما حساباً كاملا ، فالقسم الأول يُعنى بتوليد اللغة المستعملة في العلم المقصود، وهو ، كما رأينا ، يقوم على :

١. تعيين الرموز البسيطة ، التي تدخل في تركيب اللغة .

٢. وضع القواعد ، التي تجري بموجبها صياغة العبارات ، المنتمية إلى اللغة ، أي الصيغ .

أما القسم الثاني ، فيهتم بتحصيل مجموعة خاصة من الصيغ ، تكوّن مبادىء العلم . ولهذا الغرض ، فهو يحتاج إلى :

١. تصدير صيغ معينة ، تسمى « المسلمات »

٢. وضع قواعد ، تمكننا أن نستنبط ، من المسلمات ، صيغاً جديدة ، يُطلق عليها اسم « المسائل » .

١٤. نسق لوقازيفتش

لقد أمدّنا حساب الصياغة الذي عرضناه بصور القضايا المشتملة على جميع أنواع الروابط ؛ ولكن نعرف من البحوث السابقة أن إدخال كل الروابط على لغة منطق القضايا ليس بالضروري ، اذ هناك من بينها مجموعات أصغر مثل :

$$\ldots \{\uparrow\} ،\ \{\vee_1 ، \neg\} ،\ \{\leftarrow ، \neg\} ،\ \{\vee ، \wedge ، \neg\}$$

يمكن أن تؤدي كل مجموعة منها وحدها بقية الروابط . فالمجموعة التي لها هذه الصفة تسمى الأساس . وبغية تقليل عدد المسلمات ، تستفيد الانساق من الصفة المذكورة وتكتفي على العموم بلغة مختصرة ، تتضمن فقط الصيغ المركبة من روابط الأساس الذي تختاره . وإذا شاءت توسيع مجال التعبير ، بحيث أنها تتطرق إلى جميع صور القضايا المعروفة ، فإنها تدخل الروابط الباقية عن طريق تعريفها بروابط الأساس . أما التعريف ، ونكتفي هنا بالصريح منه ، فهو قاعدة مزدوجة على هذا الشكل :

$$\Psi \leftrightharpoons \Phi$$

حيث الشطر الأول منه Φ ، الذي يسمى المعرَّف ، يحتوي على الرمز الجديد ، بينما الشطر الثاني ، واسمه المعرِّف ، يحتوي فقط على الرموز البسيطة الأولية أو على رموز سبق تعريفها . فالعلامة « $\leftrightharpoons$ » تُقرأ « مساوٍ أو متكافىء بالتعريف لـ » ؛ والمعرَّف يُعتبر بمثابة كتابة مختصرة للمعرِّف . وهكذا فالتعريف يجيز لنا أن نستعيض بالمعرِّف عن المعرَّف وبالعكس ، وبالتالي أن ندخل على منطق القضايا صيغاً غير مستحصلة من حساب الصياغة المقرّر .

لما كان نسق لوقازيفتش Lukasiewicz . الذي سنعرضه هنا بالتفصيل . يعتمد على الاساس { ¬ ، ← } فقط . فان صياغة اللغة تحتاج إلى قواعد أقل مما تقدم . ولذلك فالحساب الآتي كافٍ لتأدية المطلوب :

I الرموز البسيطة : ب ، ج ، د ... ، ¬ ، ← ، (،) .

II الرموز الأساسية : ب ، ج ، د ...

III القواعد الأساسية : صغ١ : Φ ⇐ ¬ Φ

صغ٢ : Φ ، Ψ ⇐ (Φ ← Ψ)

لا شك انه ليست كل صيغة مشتقة ، حتى بواسطة هذا الحساب المختزل ، هي بذات منفعة للمنطق ، بل هناك فئة خاصة من بين الصيغ تمتاز عن غيرها ، من حيث انها تمثل حقائق عامة تسير على هديها العلوم . فلاستخلاص هذه الفئة من سائر الصيغ المستحصلة ، كان لا بد من إضافة حساب آخر ، على حساب الصياغة ، نخصه باسم الحساب الأكسيومي :

I الاشكال الاساسية :

المسلمات : سل١ : ب ← (ج ← ب)

سل٢ : (ب ← (ج ← د)) ← ((ب ← ج) ← (ب ← د))

سل٣ : (¬ ب ← ¬ ج) ← (ج ← ب)

II القواعد الأساسية :

قاعدة الوضع [بالاختصار ضع] : Φ ، Φ ← Ψ ⇐ Ψ

أي من Φ و Φ ← Ψ استخرج Ψ

قاعدة الابدال : $\Phi_{ب} \Rightarrow \Phi_{\Psi/ب}$

اي من الصيغة Φ التي تحتوي على متغير ما ب ، إستخرج الصيغة الحاصلة عن Φ بابدال المتغير **ب** بأية صيغة Ψ .

ونحصي مع القواعد التعريفات الآتية :

عر١ : $\Phi \vee \Psi \leftrightharpoons \neg \Phi \rightarrow \Psi$

عر٢ : $\Phi \wedge \Psi \leftrightharpoons \neg (\Phi \rightarrow \neg \Psi)$

عر٣ : $\Phi \leftrightarrow \Psi \leftrightharpoons (\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$

وإذا أردنا أن ندخل جميع الروابط ، فما علينا سوى اضافة تعريفات جديدة للروابط الباقية .

ادخال الروابط على هذا الشكل قد يوهم انه خرجنا عن نطاق النحو ، زعما أن التعريفات تفترض بالذات الدلالة الماصدقية . والحق أن الرموز الداخلة في النسق لا تتطلب أن نعرف عنها أكثر مما تضبطه القواعد من كيفية استعمالها . فالتعريف بحد ذاته هو اعتباطي ، ولكن بما أن موافقة النسق إلى المدلولات هي غاية منشودة ، كان من الطبيعي اختيار المتلازم مع الرابط معرّفاً له .

فيما يخص الاشتقاق في هذا الحساب ، فاننا نسير على ما سلف لنا وضعه ، فنكتب :

$\vdash_{ل} \Phi$

لنقول إن Φ قابلة للاشتقاق في نسق لوقازيفتش . وإذا لم يعترضنا أي إشكال ، فإنه يمكننا أن نتخلى عن الاشارة « ل » ونكتفي بـ « ⊢ » . ونسمي الاشتقاق في

هذا الحساب ونظائره « البرهان » . وكذلك نرمز لاشتقاق Ψ من الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$ بـِ :

$$\Phi_{١} ، \ldots ، \Phi_{ن} \vdash \Psi$$

ونخص الاشتقاق من الفرضيات باسم « الاستنباط » ؛ فنكون بذلك قد استعدنا مصطلحاً تقليدياً ، وفي الوقت نفسه حصرنا مفهومه ضمن الاطار النحوي بعد أن كان عاماً لكل نوع من أنواع الاستدلال .

وعلى وجه التدقيق ، فاستنباط Ψ من الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$ هو متتابعة من الصيغ :

$$X_{١}$$
$$X_{٢}$$
$$\vdots$$
$$X_{م}$$

حيث كل واحدة من $X_{ء}$ (١ ≤ ء ≤ م) هي :

١. اما مسلمة

٢. وإما أحدى الفرضيات

٣. وإما ناجمة ، بتطبيق قاعدة الوضع ، عن صيغتين سابقتين $X_{ي}$ و $X_{ک}$ (ي < ء ، ک < ء) حيث $X_{ک}$ هي مركبة من $X_{ي} \rightarrow X_{ء}$.

٤. واما ناجمة عن صيغة سابقة $X_{ي}$ (ي < ء) ، بإبدال متغير من $X_{ي}$ بصيغة ما ؛ شرط أن لا يرد المتغير المبدل في احدى الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$.

اضافة الشرط الأخير على قاعدة الابدال ، حين وجود فرضيات ، غايته منع أي استنباط ، يخالف اللزوم المبني على الدلالة ؛ إذ لو جاز تطبيق قاعدة الابدال دون الشرط المذكور ، لامكن مثلا :

ب ⊢ ب ∧ ج

وهو استنباط لا يقابله لزوم بين « ب » و « ب ∧ ج » .

أما البرهان فمرجعه إلى الاستنباط من مجموعة فارغة من الفرضيات، أعني هو استنباط من غير فرضيات . من هذا التعريف ، نستخلص مباشرة بعضاً من خصائص الاستنباط ، وهي :

I $\Phi \vdash \Phi$

II إذا $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$ فـ $X, \Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$

أي يجوز إضافة أية فرضية جديدة على فرضيات الاستنباط .

III إذا $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ع}}, \Phi_{\text{ع}+1}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$

فـ $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ع}+1}, \Phi_{\text{ع}}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$

أي يجوز تقديم وتأخير الفرضيات بين بعضها البعض .

IV إذا $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$ و $\Psi, X_1, \ldots, X_{\text{م}} \vdash \Omega$

فـ $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\text{ن}}, X_1, \ldots, X_{\text{م}} \vdash \Omega$.

إليك الآن مثلا عن كل من البرهان والاستنباط :

مسألة ١ : ⊢ ب ← ب

برهان .

١. (ب ← (جـ ← د)) ← ((ب ← جـ) ← (ب ← د)) سل٢

٢. (ب ← (جـ ← ب)) ← ((ب ← جـ) ← (ب ← ب)) قاعدةالابدال ب/د ؛ ١

٣. (ب ← (جـ ← ب)) سل١

٤. (ب ← جـ) ← (ب ← ب) قاعدة الوضع ؛ ٣، ٢

٥. (ب ← (جـ ← ب)) ← (ب ← ب) قاعدة الابدال جـ ← ب/جـ ؛ ٤

٦. ب ← ب قاعدةالوضع ؛ ٣، ٥

مسألة ٢ : $\Phi \rightarrow \Psi ، \Psi \rightarrow X ، \Phi \vdash X$

برهان :

١. $\Phi \rightarrow \Psi$ فرضية

٢. $\Psi \rightarrow X$ فرضية

٣. Φ فرضية

٤. Ψ قاعدة الوضع ؛ ٣، ١

٥. X قاعدة الوضع ؛ ٤، ٢

مسألة الأستنباط

العلاقة القائمة على المستوى الدلالي بين صحة الشرطية واللزوم ، تتحقق أيضاً على المستوى النحوي حيث يتعادل الاستنباط والبرهان عن طريق الشرط ، أعني ان :

$\Phi_{1} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \Phi_{\text{ن}-1} \vdash \Phi_{\text{ن}} \rightarrow \Psi$ فقط إذا $\Phi_{1} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \Phi_{\text{ن}-1} \text{ ، } \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$

لنبرهن أولا على القسم الآتي من التلازم :

مسألة I :

إذا $\Phi_{1} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \Phi_{\text{ن}-1} \vdash \Phi_{\text{ن}} \rightarrow \Psi$ فـَ $\Phi_{1} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \Phi_{\text{ن}-1} \text{ ، } \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$

برهان :

١.	Φ_{1}	سطور تتضمن فرضيات تالي المسألة I
٢.	.	
:	:	
:	:	
.	$\Phi_{\text{ن}-1}$	
ك	$\Phi_{\text{ن}}$	
ك+١	$\Phi_{\text{ن}} \rightarrow \Psi$	عن Φ_{1} ، ... ، $\Phi_{\text{ن}-1}$ حسب مقدم المسألة I
ك+٢	Ψ	قاعدة الوضع ؛ ك ، ك+١

القسم الثاني من التلازم يوافق طريقة مألوفة في الاستدلال ، تقوم على اثبات صيغة شرطية إذا Φ فـ Ψ ، بافتراض المقدم Φ واستنباط التالي منه . ولكن أول من أثبت البرهان على هذه الطريقة بشكل صريح هو المنطقي هربرن Herbrand، ولذلك يطلق عليها اسم « مسألة هربرن » أو أيضاً « مسألة الاستنباط » .

مسألة II (مسألة الاستنباط ، وبالاختصار : نبط) :

إذا $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$ ، $\Phi_{ن} \vdash \Psi$ فـَ $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١} \vdash \Phi_{ن} \rightarrow \Psi$

برهان : يفترض المقدم أن هناك متتابعة من الصيغ لنقل :

$X_{١}$

$X_{٢}$

:

:

:

$X_{م}$

كل واحدة مما قبل الأخيرة قد تكون احدى الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$. والاخيرة منها أي $X_{م}$ هي Ψ . فللتوصل إلى استنباط $\Phi_{ن} \rightarrow \Psi$ من $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$ كما ينص التالي ، نريد أن نثبت على التدرج أنه لكل ء (١ ≤ ء ≤ م) يمكن استنباط $\Phi_{ن} \rightarrow X_{ء}$ من $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$ ، أي انه بإدخال بعض الصيغ المناسبة ، يتأتى لنا على التوالي استنباط صيغ المتتابعة :

$\Phi_{ن} \leftarrow X_{١}$

$\Phi_{ن} \leftarrow X_{٢}$

: : :

$\Phi_{ن} \leftarrow X_{م}$

من الفرضيات $\Phi_{ن}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$. حيث الصيغة الاخيرة $\Phi_{ن} \leftarrow X_{م}$ هي بعينها الصيغة $\Phi_{ن} \leftarrow \Psi$ المطلوب استنباطها من الفرضيات المذكورة . ولهذه الغاية سوف نستعمل الاستدلال المعروف بالاستقراء الرياضي . وهو يقوم على اثبات خاصية ما إلى كل عنصر من عناصر المتتابعة ، اعتماداً على مرحلتين :

الأولى : وفيها يبرهن على أن الخاصية تعود إلى عنصر معين من المتتابعة ، هو عادة الأول ، وتسمى نقطة انطلاق الاستقراء .

الثانية: تنتقل من افتراض تحقق الخاصية بالنسبة لأي عدد ي من المتتابعة أصغر من عدد ما ء ، إلى البرهان على تحقق الخاصية ذاتها بالنسبة إلى العنصر اللاحق من المتتابعة أي ء ؛ وتعرف باسم الاستنتاج الاستقرائي. على هذا النحو يشمل البرهان جميع العناصر دون التطرق لكل واحد منها فردياً .

فلنطبق ذلك على المتتابعة السابقة ، ولنبرهن أن خاصية الاستنباط من $\Phi_{١}$ ، ...، $\Phi_{ن-١}$ ، متوفرة في العنصر الأول من المتتابعة $\Phi_{ن} \leftarrow X_{ء}$ ، أعني $\Phi_{ن} \leftarrow X_{١}$ ، فعندها تواجهنا حالات ثلاث :

الحالة الأولى : $X_{١}$ هي مسلمة .

والبرهان على $\Phi_{ن} \leftarrow X_{١}$ يكون :

١. $X_{١}$ — مسلمة

٢. ب ← (ج ← ب) — سل١

٣. $X_{١} \to (\Phi_{ن} \to X_{١})$ $X_{١}$/ب ، $\Phi_{ن}$/جـ ؛ ٢

٤. $\Phi_{ن} \to X_{١}$ قاعدة الوضع ؛ ١ ، ٢

الحالة الثانية : $X_{١}$ هي احدى الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$.

فاستنباط $\Phi_{ن} \to X_{١}$ يجري كالحالة الأولى :

١. $X_{١}$ فرضية

٢. $X_{١} \to (\Phi_{ن} \to X_{١})$ $X_{١}$/ب ، $\Phi_{ن}$/جـ ؛ سل$_{١}$

٣. $\Phi_{ن} \to X_{١}$ ضع ؛ ١ ، ٢

الحالة الثالثة : $X_{١}$ هي $\Phi_{ن}$.

وبالتالي فَ $\Phi_{ن} \to X_{١}$ تكون $\Phi_{ن} \to \Phi_{ن}$ ، وهذه تحصل مباشرة عن ابدال $\Phi_{ن}$ بـ « ب » في المسألة ١ :

لنفترض الآن أن $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١} \vdash \Phi_{ن} \to X_{ي}$ تستقيم بالنسبة لكل ي أصغر من عدد ما ء، ولنبين أن $\Phi_{ن} \to X_{ء}$ تقبل كذلك الاستنباط من $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$. وهنا الحالات التي تواجهنا خمسة ، فإما أن تكون $X_{ء}$:

١. مسلمة

أو ٢. احدى الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$

أو ٣. $\Phi_{ن}$

أو ٤. مستحصلة بواسطة قاعدة الوضع، من صيغتين سابقتين $X_{\text{ي}}$ و $X_{\text{ك}}$
(ي < ء و ك < ء) حيث $X_{\text{ك}}$ لها هذا التركيب $X_{\text{ي}} \rightarrow X_{\text{ء}}$

أو ٥. مستحصلة من صيغة مسابقة $X_{\text{ي}}$ (ي < ء) بالابدال ، حيث لا يرد المتغير المبدل في احدى الصيغ $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{\text{ن}}$.

ففي الحالات الثلاث يجري البرهان كما سبق بالنسبة لـ $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{١}$ ، أما في :

الحالة الرابعة : فاستنباط $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}}$ يتم على هذا النحو :

١. $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ي}}$ حسب افتراض الاستقراء، لأن $X_{\text{ي}}$ هي قبل $X_{\text{ء}}$

٢. $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow (X_{\text{ي}} \rightarrow X_{\text{ء}})$ افتراض الاستقراء

٣. $(\text{ب} \rightarrow (\text{ج} \rightarrow \text{د})) \rightarrow ((\text{ب} \rightarrow \text{ج}) \rightarrow (\text{ب} \rightarrow \text{د}))$ سل٢

٤. $(\Phi_{\text{ن}} \rightarrow (X_{\text{ي}} \rightarrow X_{\text{ء}})) \rightarrow ((\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ي}}) \rightarrow (\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}}))$
$\Phi_{\text{ن}}/\text{ب}$ ، $X_{\text{ي}}/\text{ج}$ ، $X_{\text{ء}}/\text{د}$ ؛ ٣

٥. $(\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ي}}) \rightarrow (\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}})$ ضع ؛ ٢ ، ٤

٦. $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}}$ ضع ؛ ١ ، ٥

وفي الحالة الخامسة : نطبق على الصيغة $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ي}}$ التي يفترضها الاستقراء، الابدال ذاته الذي أجريناه في تحويل $X_{\text{ي}}$ إلى $X_{\text{ء}}$. فبما أن المتغير المبدل لا يرد في $\Phi_{\text{ن}}$ ، نحصل مباشرة على $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}}$.

بناء على ذلك يتم البرهان بالاستقراء الرياضي ، وتتحقق خاصية الاستنباط من $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{\text{ن}-١}$ بالنسبة لكل صيغة من المتتابعة $\Phi_{\text{ن}} \rightarrow X_{\text{ء}}$ ($١ \leq \text{ء} \leq \text{م}$)

ومنها الصيغة Φن ← X م . والحال أن X م هي Ψ فينتج بالتالي أن :

$$\Phi_1 ، \ldots ، \Phi_{ن-1} \dashv \Phi_ن \leftarrow \Psi$$

وهو المطلوب .

لا شك ان مسألة الاستنباط ذات فائدة عملية كبرى ، فهي تساعد على تسهيل واختصار البرهان في كثير من المسائل . وذلك برد البرهان على الصيغ الشرطية ، إلى استنباط عن فرضيات موافقة . فهكذا مثلا للحصول على الصيغة :

$$(\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow ((\Psi \leftarrow X) \leftarrow (\Phi \leftarrow X))$$

نبتدىء بالاستنباط :

$$\Phi \leftarrow \Psi ، \Psi \leftarrow X ، \Phi \dashv X$$

كما مر في المسألة ٢ ، ومن ثم ننتقل على التوالي ، بتطبيق مسألة الاستنباط ، إلى :

تذنيب ٢ : $\Phi \leftarrow \Psi ، \Psi \leftarrow X \dashv \Phi \leftarrow X$

فإلى : $\Phi \leftarrow \Psi \dashv (\Psi \leftarrow X) \leftarrow (\Phi \leftarrow X)$

وأخيراً إلى: $\dashv (\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow ((\Psi \leftarrow X) \leftarrow (\Phi \leftarrow X))$

بعض المسائل :

نتابع الآن البرهنة على بعض المسائل ، التي نحتاج إليها فيما بعد .

مسألة ٣ : ⊣ ~ ب ← (ب ← ج)

برهان: ننتقل من الاستنباط ~ ب ⊣ ب ← جـ إلى البرهان على ⊣ ~ ب ← (ب ← جـ) :

١. ~ ب — فرضية

٢. ب ← (جـ ← ب) — سل١

٣. ~ ب ← (~ جـ ← ~ ب) — ~ ب / ب، ~ جـ / جـ؛ ٢

٤. ~ جـ ← ~ ب — ضع ؛ ١ ، ٣

٥. (~ ب ← ~ جـ) ← (جـ ← ب) — سل٣

٦. (~ جـ ← ~ ب) ← (ب ← جـ) — جـ / ب ، ب / جـ ؛ ٥

٧. ب ← جـ — ضع ؛ ٤ ، ٦

٨. ~ ب ← (ب ← جـ) — مسألة الاستنباط ؛ ١ — ٧

الهامش الممتد من السطر ١ حتّى ٧ ، يشير إلى أن الصيغ الواقعة على نفس العمود تتعلق بالفرضية « ~ ب » . بينما الصيغة الواقعة على السطر ٨ ، تنحاز نحــو اليمين ، إشارةً إلى أنها استقلت ، بتطبيق مسألة الاستنباط ، عن الفرضية المذكورة .

مسألة ٤ : ⊣ ~ ~ ب ← ب

برهان :

١. ~ ~ ب — فرضية

٢. ~ ب ← (ب ← جـ) — مسألة ٣

٣.   ⌐⌐ب ← (⌐ ب ← ⌐⌐⌐ ب) ⌐ب/ب، ⌐⌐⌐⌐ب/ج ؛ ٢

٤.   ⌐ ب ← ⌐⌐⌐ ب   ضع ؛ ١ ، ٣

٥.   (⌐ب ← ⌐⌐⌐ب) ← (⌐⌐ب ← ب) ⌐⌐ ب / ج ؛ سل$_{٣}$

٦.   ⌐⌐ ب ← ب   ضع ؛ ٤ ، ٥

٧.   ب   ضع ؛ ١ ، ٦

٨.   ⌐⌐ ب ← ب   نبط ؛ ١ – ٧

مسألة ٥ : ⊣ ب ← ⌐⌐ ب

برهان :

١. ⌐⌐⌐ ب ← ⌐ ب   ⌐ ب/ ب ؛ مسألة ٤

٢. (⌐⌐⌐ب ← ⌐ب) ← (ب ← ⌐⌐ب) ⌐⌐ب/ب، ب/ج؛ سل$_{٣}$

٣. ب ← ⌐⌐ ب   ضع ؛ ١ ، ٢

مسألة ٦ · ⊣ (ب ← ج) ← (⌐ ج ← ⌐ ب)

برهان :

١.   ب ← ج   فرضية

٢.   ⌐⌐ ب ← ب   مسألة ٤

٣.   ⌐⌐ ب ← ج   تذنيب ٢ ؛ ٢ ، ١

٤. ج ← ⌐⌐ج		ج / ب ؛ مسألة ٥

٥. ⌐⌐ب ← ⌐⌐ج		تذنيب ٢ ؛ ٣ ، ٤

٦. (⌐⌐ب ← ⌐⌐ج) ← (⌐ج ← ⌐ب)		⌐ب/ب، ⌐ج/ج؛ سل٣

٧. ⌐ج ← ⌐ب		ضع ؛ ٥ ، ٦

٨. (ب ← ج) ← (⌐ج ← ⌐ب)		نبط ؛ ١ — ٧

مسألة ٧ : ⊣ ب ← (⌐ج ← ⌐(ب ← ج))

برهان :

١. ب		فرضية

٢. ب ← ج		فرضية

٣. ج		ضع ؛ ١ ، ٢

٤. (ب ← ج) ← ج		نبط ؛ ١ — ٣

٥. ((ب ← ج) ← ج) ← (⌐ج ← ⌐(ب ← ج))		ب ← ج/ب ؛ مسألة٦

٦. ⌐ج ← ⌐(ب ← ج)		ضع ؛ ٤ ، ٤

٧. ب ← (⌐ج ← ⌐(ب ← ج))		نبط ؛ ١ — ٦

في عرض هذا البرهان ، تتعلق الصيغ الواقعة على عمود واحد ، بالفرضيات الموجودة على نفس العمود ، أو على عمود ذي هامش أصغر . ففي السطر ٣ ، تتعلق « ج » بالفرضية « ب ← ج » وبالفرضية « ب » كذلك . عند السطر ٤ جرى التخلص ، بواسطة مسألة الاستنباط ، من الفرضية « ب ← ج » ،

وبالتالي فالسطور ٤ ــ ٦ لا تتعلق إلا بالفرضية « ب » . أما السطر ٧ فهو لا يتعلق بأية فرضية البتة .

مسألة ٨ : ⊣ (ب ← ج) ← ((¬ ب ← ج) ← ج)

برهان :

١. ب ← ج فرضية

٢. ¬ ج فرضية

٣. (ب ← ج) ← (¬ ج ← ¬ ب) مسألة ٦

٤. ¬ ج ← ¬ ب ضع ؛ ١ ، ٣

٥. ¬ ب ضع ؛ ٢ ، ٤

٦. ¬ب←(¬ ج← ¬ (¬ب←ج)) – ¬ ب/ب؛ مسألة ٧

٧. ¬ ج ← ¬ (¬ ب ← ج) ضع ؛ ٥ ، ٦

٨. ¬ (¬ ب ← ج) ضع ؛ ٢ ، ٧

٩. ¬ ج ← ¬ (¬ ب ← ج) نبط ؛ ١ ــ ٨

١٠. (¬ ج ← ¬ (¬ ب ← ج)) ← ((¬ ب ← ج) ← ج)
جاب، ¬ ب←جاج؛سل٣

١١. (¬ ب ← ج) ← ج ضع ؛ ٩ ، ١٠

١٢. (ب ← ج) ← ((¬ ب ← ج) ← ج) نبط ؛ ١ ــ ١١

تمارين :

I برهن على المسائل الآتية :

١. (ب ← (جـ ← د)) ← (جـ ← (ب ← د))

٢. (ب ← جـ) ← (ب ← (جـ ← د) ← (ب ← د))

٣. (ب ← (ب ← جـ)) ← (ب ← جـ)

٤. ب ∨ ¬ ب

٥. ¬ ب ∨ ب

٦. ب ∨ جـ ← جـ ∨ ب

٧. ب ∧ جـ ← ب

٨. ب ∧ جـ ← جـ

٩. ب ∧ جـ ← جـ ∧ ب

١٠. ب ← (جـ ← ب ∧ جـ)

١١. ((ب ← جـ) ← جـ) ← ((جـ ← ب) ← ب)

II برهن على التعميم التالي لمسألة الاستنباط :

Φ_1 ، ... ، $\Phi_{ن}$ ⊢ Ψ فقط إذا ⊢ Φ_1 ∧ ... ∧ $\Phi_{ن}$ ← Ψ
(استعن بالمسائل ٧ و ٨ و ١١ من التمرين I)



خصائص النسق

رغم أن النسق الأكسيومي ، بحد ذاته ، ليس سوى مجرد لعب صوري ، مرهون بإرادة الواضع ، فلا بد له من شروط إضافية تضمن فائدته . وعملياً ، فاختيار المسلمات والقواعد لا يخلو من أغراض دلالية ، إذ الغاية من وضع النسق هي حصر المسائل في بعض صيغ من اللغة دون الأخرى ، وعلى الأخص تلك الصيغ التي إذا ما فسرت بالنسبة إلى مجال من المدلولات ، أدت حقائق هذا المجال . ولذلك قام البحث في النظريات الصورية حول مطالب عـــدم التناقض ، والتمامية ، واستقلال المسلمات .

١٥. عدم التناقض

عادة ، يفهم بالنسق الخالي من التناقض ، النسق الذي يستحيل فيه البرهان على صيغة ما ونقيض هذه الصيغة معاً . وبقول آخر :

تعريف ١ : النسق د هو خال من التناقض ، فقط إذا لم توجد صيغة Φ ، بحيث أن د ⊢ Φ و د ⊢ ¬ Φ .

لان النسق الذي يجيز البرهان على صيغة ونقيضها غير موثوق به . إذ ، استناداً إلى المسألة ١٤،٣ ، أي ¬ ب ← (ب ← ج) ، ينتج أنْ كل صيغة يمكن البرهان عليها فيه ، وبالتالي يصبح النسق مبتذلاً ، لدرجة ان لا منفعة منه البتة . وواضح ايضاً أن العكس هو صحيح ، أي عن وضعنا أن :

تعريف ٢ : د هو خال من التناقض ، فقط إذا لم تكن كل صيغة قابلة للبرهان فيه .

يلزم أنه إذا كان النسق متناقضاً ، فكل صيغة هي قابلة للبرهان فيه ، وبالتالي فكل من الصيغة Φ ونقيضها ¬ Φ ، يمكن البرهان عليها فـي النسق .

بسبب التكافؤ الحاصل بين التعريف ١ والتعريف ٢ ، يجوز أن ينوب الواحد منهما مناب الآخر ، في تعريف عدم التناقض . وبالطبع ، يُفهم هذا ضمن لغة معينة ، تحتوي على رابط السلب . لأن التعريف ١ هو ، من جهة تركيب اللغة ، أخص من التعريف ٢ ، إذ يعرّف عدم التناقض ، بالنسبة إلى رمز خاص هو رابط السلب ؛ وقد توجد لغة لا تحتوي على هذا الرمز ؛ بينما ٢ هو مطلق من كل شرط ، بحيث انه يمكن تطبيقه على كل لغة . كذلك انطلاقاً مـن التعريف ٢ ، الذي يشترط أن لا تكون كل صيغة قابلة للبرهان ، أي أن تكون

بعض الصيغ غير قابلة للبرهان ، يمكن تعريف عدم التناقض بحصر عدم البرهنة في صيغة أو فئة معينة من الصيغ ، يحتوي عليها النسق . فهكذا ، يختار بوست Post متغيرات القضايا ، من أجل تعريف عدم التناقض . ولذلك ، فالمعيار ، المنسوب إليه ، ينص على أن :

تعريف ٣ : النسق د هو خال من التناقض ، فقط إذا وجدت صيغة ، مؤلفة من متغير قضية ، غير قابلة للبرهان .

من الواضح أن هذه المعايير الثلاثة ، التي يصلح كل واحد منها أن يكون تعريفاً لعدم التناقض ، لا تتعدى النطاق النحوي للغة . فهي لا تتضمن اية علاقة مباشرة بالمدلولات ، وبالتالي ، فالبرهنة عليها لا تستدعي بالضرورة اعتبار هذه الأخيرة . ولكن الوقوع على التعريفات المذكورة ، يجد دوافعه في الجانب الدلالي، إذ الغاية من وضع الأنساق الصورية ، هي في تحقيقها في مجالات مختلفة . والحاصل أن اللجوء الى مفهوم الصحة ، يمدنا بطريقة سهلة لتبيان عدم التناقض في نسق ما ، بكل معنى من المعاني الثلاثة ، التي وضعناها . ولهذا ، نبرهن أولا على المسألة المسماة بعدم التناقض الدلالي ، وهي :

مسألة ١ : إذ $\vdash \Phi$ فَ $\models \Phi$

أي إذا كانت الصيغة Φ قابلة للبرهان فهي صحيحة .

برهان : نبدأ فنقرر أن المسلمات الموضوعة كلها صحيحة ، والأمر هو كذلك مع مسلمات لوقازيفتش . ثم نتحقق من أن القواعد ، التي تتم بواسطتها عملية الاستدلال ، لا تسمح إلا باستخراج صيغ صحيحة من الصيغ الصحيحة ، أي انها تحفظ الصحة ، إذا ما طبقت على صيغ صحيحة . وبالفعل ، فقاعدة الوضع هي من هذا النوع ، إذ لو صحت Φ وصحت $\Phi \to \Psi$ ، لوجب أن تكون Ψ أيضاً صحيحة . وكذلك فيما يخص قاعدة الابدال ، فقد سبق لنا أن

رأينا في فصل التلازم ، أنها تبقي على الصحة .

استناداً إلى المسألة ١ ، يتضح لنا أن النسق ل ، يتمتع بخاصة عدم التناقض في كل من المفاهيم الثلاثة ، كما يأتي :

مسألة ٢ : ل هو خال من التناقض بالنسبة إلى السلب .

برهان: لأنه لو صح النقيض، أي جاز لصيغة ما Φ أن تكون $\vdash \Phi$ و $\vdash \neg \Phi$ لوجب ، وفقاً للمسألة ١ ، أن تكون $\models \Phi$ و $\models \neg \Phi$ معاً ، أي أن قيم Φ كلها « ص » وكذلك قيم $\neg \Phi$. لكن هذا محال ، لأن رابط السلب يغيّر القيم . وبالتالي ، فافتراض $\vdash \Phi$ و $\vdash \neg \Phi$ هو باطل .

مسألة ٣ : ل هو خال من التناقض مطلقاً .

برهان : المسألة تنص على وجود صيغة لا يمكن البرهان عليها في النسق ل . وهذا واضح ، بسبب التلازم الحاصل بين التعريفين ١ و ٢ في ل.

مسألة ٤ : ل هو خال من التناقض بمفهوم بوست .

برهان : لأنه لا يوجد متغير قضية يأخذ دوماً القيمة « ص » .

١٦. التمامية

عدم التناقض هو شرط ضروري ، وضمانة لا غنى عنها ضد تهافت النسق وابتذاله ؛ ولكنه غالباً لا يفي وحده بجميع الأغراض ، التي وضع من أجلها النسق ؛ إذ قد يتحقق عدم التناقض في أنساق فقيرة ، أي تلك التي لا تسمح إلا بالبرهان على مسائل قليلة ، بالنسبة إلى الصيغ التي كان يُتوخى الحصول عليها ، مما يدعو إلى التساؤل حول امكانية إضافة مسلمات أو قواعد جديدة على النسق الموضوع ، بحيث أن عدد المسائل ، التي يمكن البرهان عليها ، يزداد عما كان عليه ، دون أن يفقد النسق بذلك خاصة عدم التناقض . لا شك أن الدوافع على تحقيق هذا المطلب ، هي في الأصل دلالية . فالانساق الصورية تُقام ، عادة ، للاستدلال على الصيغ التي تصدق أو تصح ، إذا ما أسندت لها تفسيرات ضمن مجال من المدلولات . ولذلك ، يُفرض من النسق ، في معظم الحالات ، أن يكون قوياً لدرجة انه يسمح بالبرهان على سائر القضايا الصادقة والصور الصحيحة ؛ فإن تحقق له ذلك ، كان النسق تاماً ، من وجهة نظر الدلالة .

فيما يخص نسق لوقازيفتش ، فهو يتصف بهذه التمامية الدلالية ، أي ان كل صورة صحيحة يمكن البرهان عليها فيه ، وبالرموز : إذا $\models \Phi$ فـَ $\vdash \Phi$. فلاثبات ذلك ، يلزمنا أولا البرهان على المسألة الآتية :

مسألة ١ : لتكن Φ صيغة تحتوي من متغيرات القضايا على « $ب_١$ ، ... ، $ب_ن$ » فقط ، وليكن بالنسبة إلى إسناد من القيم ق :

$ب'_ء$ هو $ب_ء$ إذا كان ق ($ب_ء$) = ص

$ب'_ء$ هو $\sim ب_ء$ إذا كان ق ($ب_ء$) = ك

Φ' هي Φ إذا كان ق (Φ) = ص

Φ' هي ¬ Φ إذا كان ق (Φ) = ك

فعندها يستقيم أن :

$ب'_1$ ، ... ، $ب'_ن$ ⊢ Φ'

برهان: تقوم الطريقة على استقراء عدد المرات م لوقوع الروابط « ¬ ، ← » في Φ .

I نقطة انطلاق الاستقراء : لنفترض م = ٠ ، فعندها يكون تركيب Φ من متغير قضية واحد $ب_1$ ، وبالتالي فالبرهان يقتصر على أن :

$ب_1$ ⊢ $ب_1$ إذا كان ق($ب_1$) = ص

¬ $ب_1$ ⊢ ¬ $ب_1$ إذا كان ق($ب_1$) = ك

وهاتان الصيغتان واضح الحصول عليهما من المسألة ١٤،١ ، بتطبيق مسألة الاستنباط وقاعدة الابدال .

II لنفترض أن المسألة تستقيم بالنسبة لكل صيغة تحتوي على أي عدد من وقوع الروابط دون العدد م ، ولنبرهن انها تستقيم كذلك بالنسبة للصيغ ذات العدد م . فالتراكيب الممكنة هي :

١. Φ هي ¬ Ψ ، حيث Ψ تحتوي على عدد من وقوع الروابط أقل من م ، فاذن يفترض الاستقراء أن :

$ب'_1$ ، ... ، $ب'_ن$ ⊢ Ψ'

عندها تواجهنا الحالات الآتية :

١،١. ق (Ψ) = ص وبالتالي ق (Φ) = ك

ولذلك تكون Ψَ هي Ψ

و Φَ هي ⌐ Φ

فالبرهان يعود إلى اثبات :

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ ⌐ ⌐ Ψ

والحال أن الاستقراء يفترض صدق المسألة بالنسبة إلى Ψ ، أي أن :

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ Ψ

فبالاستعانة بالمسألة ١٤،٥ : Ψ ← ⌐ ⌐ Ψ

وتطبيق قاعدة الوضع ، نحصل على المطلوب .

١،٢. ق (Ψ) = ك وبالتالي ق (Φ) = ص

وعليه فَ : Ψَ هي ⌐ Ψ

و : Φَ هي Φ .

في هذه الحالة ، تنحصر المسألة في الاستنباط :

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ ⌐ Ψ

الذي يفترض الاستقراء صدقه .

٢. Φ هي Ψ ← X

حيث كل من Ψ و X تحتوي على عدد من وقوع الروابط أقل من م ، ولذلك يصدق بالنسبة إلى Ψَ و Xَ أن :

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ Ψَ

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ Xَ

فالحالات المحتملة هي :

٢،١. ق (Ψ) = ص و ق (X) = ص
وبالتالي ق (Φ) = ص.

فبما أن $\bar{X}$ هي X ، يعطينا افتراض الاستقراء :

$$\bar{ب}_1 ، ... ، \bar{ب}_ن \vdash X$$

والحال أن : $\vdash X \leftarrow (\Psi \leftarrow X)$، استناداً إلى المسلمة ١ .

إذن ، بتطبيق قاعدة الوضع ، نحصل على المطلوب .

٢،٢ ق (Ψ) = ص و ق (X) = ك
وبالتالي ق (Φ) = ك .

فالبرهان يعود إلى اثبات :

$$\bar{ب}_1 ، ... ، \bar{ب}_ن \vdash \neg(\Psi \leftarrow X)$$

وهذا ما نصل إليه بتطبيق قاعدة الوضع مرتين على فرضيّي الاستقراء :

$$\bar{ب}_1 ، ... ، \bar{ب}_ن \vdash \Psi$$

$$\bar{ب}_1 ، ... ، \bar{ب}_ن \vdash \neg X$$

وعلى المسألة ٧،١٤ أي : $\Psi \leftarrow (\neg X \leftarrow \neg(\Psi \leftarrow X))$

٢،٣. ق (Ψ) = ك ، ق (X) = ص
وبالتالي ق (Φ) = ص .

فالبرهان على المسألة يجري كما في الحالة ٢،١ .

٢،٤. ق (Ψ) = ك ، ق (X) = ك
وبالتالي ق (Φ) = ص .

وهنا الاستقراء يفترض أن :

بَ ، ... ، بَن ⊣ ⌐ Ψ

فبالاستعانة بالمسألة ٣ ، ١٤ : ⌐ Ψ ← (Ψ ← X)

وتطبيق قاعدة الوضع ، نحصل على :

بَ١ ، ... ، بَن ⊣ Ψ ← X .

مسألة ٢ (التمامية الدلالية) : إذا ⫤ Φ فَ ⊣ Φ

برهان : إذا كانت Φ صحيحة ، فكل قيم Φ هي « ص » . ولذلك ، تحولنا المسألة ١ أن نثبت :

بَ١ ، ... ، بَ١-ن ، بَن ⊣ Φ

في كل إسناد من القيم . فبما أن « بَن » قد تحتمل القيمة « ص » وقد تحتمل القيمة « ك » ، نحصل معاً على :

بَ١ ، ... ، بَن-١ ، بن ⊣ Φ

بَ١ ، ... ، بَن-١ ، ⌐ بن ⊣ Φ

ومنهما نستنتج ، بتطبيق مسألة الاستنباط ، أن :

بَ١ ، ... ، بَن-١ ⊣ بن ← Φ

بَ١ ، .... ، بَن-١ ⊣ ⌐ بن ← Φ

والآن، بالاستعانة بالمسألة ١٤،٨ : (بن ← Φ) ← ((⌐ بن ← Φ) ← Φ) ، وتطبيق قاعدة الوضع مرتين ، يتأتى لنا حذف بَن هكذا :

بَ١ ، ... ، بَن-١ ⊣ Φ .

ونكرر نفس العملية بالنسبة إلى كل واحدة من الفرضيات بّء ، حتى نتخلص منها جميعاً ، فنحصل أخيراً على : $\vdash \Phi$.

مع حصول التمامية الدلالية وعدم التناقض الدلالي ، يتحقق التلازم بين الجانب النحوي والجانب الدلالي في منطق القضايا . إذ المسألتان معاً تنصّان على أن :

$\models \Phi$ فقط إذا $\vdash \Phi$

وفوق ذلك فإن :

$\Phi_{\text{١}}, \Phi_{\text{٢}}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \models \Psi$ فقط إذا $\models \Phi_{\text{١}} \wedge \Phi_{\text{٢}} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\text{ن}} \to \Psi$

و : $\Phi_{\text{١}}, \Phi_{\text{٢}}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$ فقط إذ $\vdash \Phi_{\text{١}} \wedge \Phi_{\text{٢}} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\text{ن}} \to \Psi$

وبالتالي تصح هذه المسألة العامة :

مسألة ٣ : $\Phi_{\text{١}}, \Phi_{\text{٢}}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \models \Psi$ فقط إذا $\Phi_{\text{١}}, \Phi_{\text{٢}}, \ldots, \Phi_{\text{ن}} \vdash \Psi$.

وهي تبين أن اللزوم يطابق كلياً الاستنباط ، بمعنى أن كل المسائل التي تستقيم لاحدهما تستقيم أيضاً للآخر .

ثمة تعريف آخر للتمامية ، لا يلجأ إلى مفاهيم دلالية ، بل ينحصر ضمن نطاق النحو ؛ ولذلك يطلق على هذه التمامية اسم « التمامية النحوية » . وهي ، كما أشرنا في أول الفصل ، تنطلق من امكانية اعتبار احدى الصيغ غير القابلة للبرهان ، مسلمة جديدة ، تضاف على المسلمات الموضوعة ، بحيث أن عدد المسائل يزداد ، دون أن يقع النسق في التناقض . من هنا كان هذا التعريف للتمامية النحوية .

تعريف ١ : يتصف النسق بالتمامية النحوية ، فقط إذا ، بالنسبة لكل صيغة

Φ ، إما أن تكون $\vdash \Phi$ ، وإما يصبح النسق متناقضاً عند اضافة Φ كسلمة إليه .
نلاحظ أن هذا التعريف يستند إلى تناقض النسق ، فبما أن مفهوم التناقض يكون على اعتبارات ثلاثة : مطلقاً وبالنسبة إلى السلب وبمفهوم بوست ، كذلك تتخصص التمامية النحوية بالتعريفات الثلاثة الآتية :

تعريف ٢ : يكون النسق تاماً على الاطلاق ، فقط إذا ، لكل صيغة Φ ، إما أن تكون $\vdash \Phi$ ، وإما عن إضافة Φ كسلمة إلى النسق ، يمكن البرهان على كل صيغة فيه .

تعريف ٣ : يكون النسق تاماً بالنسبة إلى السلب ، فقط إذا ، لكل صيغة Φ ، إما أن تكون $\vdash \Phi$ ، وإما عن إضافة Φ كسلمة إلى النسق ، يتحتم وجود صيغة Ψ بحيث أن $\vdash \Psi$ و $\vdash \neg \Psi$.

تعريف ٤ : يكون النسق تاماً بمفهوم بوست ، فقط إذا ، لكل صيغة Φ ، إما أن تكون $\vdash \Phi$ ، وإما عن إضافة Φ كسلمة إلى النسق ، يمكن البرهان على متغير قضية فيه .

بإزاء هذه التعريفات ، نبرهن على المسائل الآتية :

مسألة ٤ : النسق ل هو تام بمفهوم بوست .

برهان : لنفترض $\neg \vdash \Phi$ ، فحسب المسألة ٢ ينجم ان $\neg \models \Phi$ ، وهذا يعني أنه يوجد اسناد من القيم للمتغيرات «$ب_1$ ، ... ، $ب_ن$» الداخلة في تركيب Φ ، تأخذ فيه Φ القيمة «ك» . فإذا أبدلنا في Φ كل متغير صادق في الاسناد المذكور بصورة صحيحة ، مثلا بِ «ب ← ب» ، وكل متغير كاذب بصورة متناقضة ، مثلا بِ «¬ ب ← ب» ، لحصلنا على صورة جديدة Φ° دائمة الكذب ، أي متناقضة . وبالتالي ، فكل الصور الشرطية التي مقدمها Φ° هي صحيحة ، ومن بينها Φ° ← ب . لذلك ، حسب التمامية الدلالية :

⊣ $\mathring{\Phi}$ ← ب

والحال ، عند احصاء Φ مع المسلمات ، نستخلص مباشرة بالابدال أن :

⊣ $\mathring{\Phi}$

فتطبيق قاعدة الوضع ، يتأتى لنا البرهان على « ب » . وهو المطلوب .

مسألة ٥ : ل هو تام مطلقاً .

برهان : لأنه إذا كانت ⊣ ب ، فبالابدال تكون كل صيغة قابلة للبرهان .

مسألة ٦ : ل هو تام بالنسبة إلى السلب .

برهان : إذا كانت كل صيغة قابلة للبرهان ، فبالأحرى Φ و ـ Φ هما كذلك

١٧ استقلال المسلمات

انطرحت مسألة الاستقلال مع قيام الهندسة الاقليدية . وكان السبب في ذلك أن المسلمات ، التي تصدرت الهندسة ، تضمنت واحدة معروفة بمسلمة التوازي وهي ، في صياغة هلبرت ، تنص على أنه :

إذا كان خ خطاً ما ،و ن نقطة ما غير واقعة على الخط خ ، فانه يوجد على الأكثر خط واحد ط ، يستوفي الشروط الآتية :

١. ن تقع على ط
٢. يوجد سطح يقع عليه الخطان خ و ط
٣. الخطان خ و ط لا يتقاطعان .

فبينما لم تتعرض المسلمات الأخرى للشك ، لبيانها الذاتي المزعوم ، مثل « الكل أعظم من الجزء » ، فمسلمة التوازي أثارت التساؤل حول وضوحها ، وانخراطها في سلك الأوليات . ومنذ القدم ، حاول اليونان ومن بعدهم العرب تأخيرها عن رتبة المسلمات واعتبارها مسألة تحتاج إلى البرهان ، ولكنهم لم يفلحوا . فالطوسي يذكر ، بهذا الصدد ، عن سابقيه :

« لم أعثر ، فيما رأيت من كلامهم ، على برهان كاف ، بل وجدت ، من وجدته باحثا عنها ، يتمسك في إبانتها بأنواع الحيل ، ويتمحل لإيضاحها غاية التمحل . فمنهم من بدلها بمصادرة أخرى قريبة منها في الظهور والخفاء ، وهو أبو علي بن الهيثم المتبحر في الفن الرياضي . ومنهم من أقام عليها برهانا مبنياً على مقدمة لا يتقدمها إلى الوضوح والجلاء ، وهو الحكيم العالم ابو الفتح

عمر الخيامي . ومنهم من بناها على مقدمة مغالطية ، لا تروج على صاحب الفطنة والذكاء ، وهو الفاضل العباس بن سعيد الجوهري ... » *.

وكذلك لم يكن الطوسي نفسه بأوفر حظاً منهم .في القرن السابع عشر ، توسع سكري Saccheri في البرهان الوارد في الشكل الثالث عند الطوسي ، معتمداً ذات الطريقة غير المباشرة ، المعروفة بطريقة الخلف ، كما يأتي :

إذا كانت مسلمة التوازي « ز» ، يمكن استنتاجها عن باقي المسلمات « سل° » أي ، إذا كانت « ز » غير مستقلة عن « سل° » ، فكل نسق يتألف من « سل° » وأية مسلمة « زَ » مضادة لمسلمة التوازي ، لا بد له أن يؤدي إلى تناقض .

هذه المحاولة أيضاً لم توصل إلى التناقض المطلوب ، بل على العكس ، فقد أظهرت انه يمكن أيضاً ، اعتماداً على المسلمات « سل° » و « زَ » ، بناء نظرية مغايرة للإقليدية ، تتمتع بقوة وثراء الأخيرة . وبالفعل ، اقتناعاً منهما باستقلال مسلمة التوازي عن البقية ، حقق بولياي Bolyai ولوباتشفسكي Lobatschewsky في أوائل القرن التاسع عشر ، هندسة جديدة ، دُعيت بالهندسة اللاإقليدية . مع هذا كله ، لم تجد مسألة الاستقلال الحل الأخير ، إذ أنه كان من الممكن أن يؤدي التقصي في البحث إلى تناقض . فعدم الوقوع على برهان ، في استنتاج قضية التوازي عن المسلمات الأخرى ، ليس بدليل على استقلالها . أما الجواب الوافي ، فاكتشفه كلاين Klein سنة ١٨٧١ ، وذلك بأن قدم تفسيراً للرموز ، يصدق عنده النسق المؤلف من « سل° » و « زَ » معاً ، وبهذا برهن على جواز اجتماعهما ، وبالتالي على استحالة استنتاج مسلمة التوازي عن باقي المسلمات .

---

* نصير الدين الطوسي : الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية ، طبعة حيدر آباد . سنة ١٩٥٩ هـ. صفحة ٤.

يطلق الاستقلال على المسلمات وعلى القواعد أيضاً . وبالتحديد ، فالمسلمة «سلء» تسمى مستقلة في النسق د ، أي في مجموعة من المسلمات والقواعد ، إذا امتنع استنتاجها عن النسق الحاصل عن حذف «سلء» من د . وكذلك ، فالقاعدة المستقلة ، الداخلة في النسق د ، هي التي لا يمكن استنتاجها من النسق الحاصل عن حذف القاعدة من د . وبقول آخر ، فالمسلمة أو القاعدة تسمى مستقلة ، إن وجدت مسألة في النسق الأصلي ، يستحيل البرهان عليها ، من دون المسلمة أو القاعدة المذكورة . خاصة الاستقلال هذه ليست شرطاً ضرورياً لإقامة النسق ، بل هي بالأحرى من متطلبات فن البيان ، لما تفيده من ايجاز ووضوح .

لنعتبر صيغة ما حصلنا عليها بطريقة آلية ، طبقاً للقواعد الحسابية ، على أنها مجرد متتابعة من الرموز ، مثلا «ب ∨ ج ← ب» . فهذه الصيغة ، إذا توقفنا عند وجهة النظر التي سميناها بالنحوية ، لا تفيد إلا ترتيباً لأشكال تنتمي إلى أصناف متنوعة . أما استعمالنا للأحرف الابجدية والرموز «∨ ، ←» فهو جزافي ، لا يقصد منه اية إشارة إلى معان مخصوصة ، وقد كان بالامكان الاستعاضة عن الرموز السابقة بأخرى تراعي هيئة التركيب «● ▼ ■ — ●». فالرموز التي تتألف منها الصيغ ، تحتمل بحد ذاتها تفسيرات عديدة . في الفصول السابقة ، اتخذنا القضايا ، من حيث ان لها قيمة معينة صادقة أو كاذبة، مجالا للتفسير ، ولذلك اختص التفسير هناك بالتقييم ، أي بتابع fonction ق ، يسند إلى كل صيغة Φ قيمة ق (Φ) من المجموعة {ص ، ك} ، ويستوفي الشروط الآتية :

ق (¬ Φ) ⇌ ليس (ق (Φ))

ق (Φ ∧ Ψ) ⇌ و (ق (Φ) ، ق (Ψ))

ق (Φ ∨ Ψ) ⇌ إما أو (ق (Φ) ، ق (Ψ))

... الخ .

حيث كتابة « ليس » و« و » و« إما أو » ... الخ ، على هذا الوضع ، تشير إلى أن هذه هي أيضاً توابع ، تسند لكل قيمة أو لكل زوج قيم من المجموعة { ص ، ك } ، قيمة من نفس المجموعة ، حسب التعريفات التالية ، الموافقة لجداول الصدق :

ليس (ص) ≒ ك ليس (ك) ≒ ص .

و(ص ، ص) ≒ ص و(ص ، ك) ≒ ك و(ك ، ص) ≒ ك

و (ك ، ك) ≒ ك . إما أو (ص ، ص) ≒ ص ... الخ .

ولكن ، بالامكان أيضاً أن نختار مدلولات أخرى ، نفسر بها الرموز الفارغة ، كالأعداد أو أية مجموعة أخرى . وعلى العموم ، فالتفسير هو إسناد مدلولات إلى الرموز ، التي تتركب منها الصيغ ، وبلغة أدق ، فهو تابع يُسند إلى الرموز عناصر من مجموعة ما يطلق عليها اسم مجال التفسير .

في منطق القضايا ، الطريقة المتبعة لتقرير الاستقلال هي تعميم لطريقة التقييم ؛ فعوضاً عن أن نكتفي بمجموعة من قيمتين ، نتخذ مجموعة من ثلاث قيم أو أكثر ، نشير إليها بالاعداد الطبيعية ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ن ، ونختار من بين هذه عدداً معيناً ، يلعب دوراً مماثلا للدور الذي يلعبه « ص » ، نطلق عليه اسم القيمة الممتازة . ثم نسند إلى المتغيرات ، في كل تفسير ، قيمة من القيم الموضوعة ، وإلى الرموز « ← ، ۸ ، ۷ ، ... » توابع ، نستطيع تحديدها بواسطة الجداول ، على نحو شبيه بالتقييم السابق . ونراعي هذه التعريفات :

تعريف ۱ : تصدق الصيغة بالنسبة إلى مجال ما ، فقط إذا أسند لها التفسير القيمة الممتازة .

تعريف ٢ : تكون الصيغة صحيحة بالنسبة إلى مجال ما ، فقط إذا صدقت عند كل تفسير من هذا المجال .

والآن ، فالفكرة التي ينطلق منها تقرير الاستقلال ، بالنسبة إلى مسلمة مـا « سل$_{٤}$ » ، هو انه لو كانت المسلمة المذكورة غير مستقلة عن النسق ، أي ليست سوى صيغة مستخرجة من المسلمات الباقية بتطبيق القواعد ، لوجب أن كل ميزة ، تتصف بها المسلمات الأخرى وتُبقي عليها القواعد ، تتصف بها أيضاً المسلمة « سل$_{٤}$ » . بناء على هذا ، يكفي أن نجد مجالا للتفسير ، تتصف فيه بالصحة كل المسلمات المغايرة لـِ « سل$_{٤}$ » ، وتكون القواعد مبقية على هذه الميزة ، أي على الصحة ، ومع ذلك لا تصح المسلمة « سل$_{٤}$ » المطلوب البرهان على استقلالها .

إليك تفصيل البرهان على استقلال المسلمة « سل$_{١}$ » : نختار مجالا للتفسير الأعداد { ٠ ، ١ ، ٢ } ، والقيمة الممتازة « ٠ » . ونحدد التفسير ف$_{١}$ بأنه التابع الذي يسند إلى كل صيغة Φ قيمة من المجموعة { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ويستوفي هذين الشرطين :

$$\text{ف}_{1}(\neg\Phi) \lneqq \neg_{1}(\text{ف}_{1}(\Phi))$$

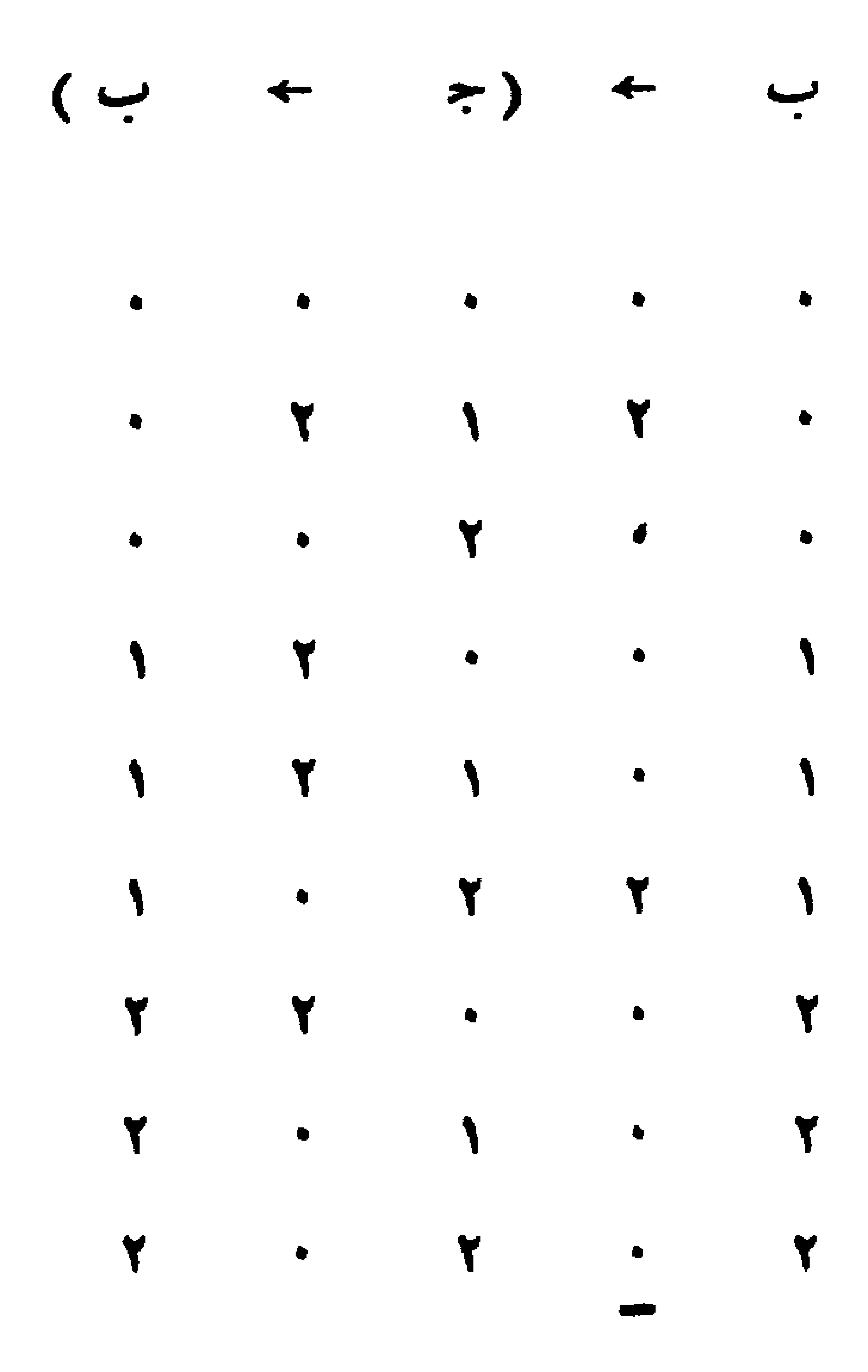
$$\text{ف}_{1}(\Phi\rightarrow\Psi) \lneqq \rightarrow_{1}(\text{ف}_{1}(\Phi)\text{ ، }\text{ف}_{1}(\Psi))$$

أما تعريفا التابعين $\neg_{1}$ و $\rightarrow_{1}$ فنقرأهما في الجدولين الآتيين :

ب	$\neg_1$ (ب)
٠	١
١	١
٢	١

ب	ج	$\rightarrow_1$ (ب ، ج)
٠	٠	٠
٠	١	٢
٠	٢	٢
١	٠	٢
١	١	٢
١	٢	٠
٢	٠	٠
٢	١	٠
٢	٢	٠

اعتماداً على ذلك ، يمكن التحقق بواسطة الجداول ، أن المسلمة الثانية والثالثة هما صحيحتان ، بمعنى أنهما تأخذان دائماً القيمة الممتازة « ٠ » ، وأن قاعدة الابدال تبقي على الصحة ، كما يتضح من مفهوم الابدال ذاته ، وأن قاعدة الوضع هي أيضاً تحفظ الصحة ، لأنه ، إن أخذت كل من Φ و $\Phi \rightarrow \Psi$ القيمة الممتازة ، وجب أن تأخذ Ψ كذلك هذه القيمة ، على ما يشير جدول « $\rightarrow_1$ » .
ولكن ، بخلاف ذلك ، فاننا نتحقق ان المسلمة الأولى تحتمل تفسيرا لا تصدق فيه ، كما يظهر في هذا الجدول :



ب	←	(ج	←	ب)
٠	٠	٠	٠	٠
٠	٢	١	٢	٠
٠	٠	٢	٠	٠
١	٠	٠	٢	١
١	٠	١	٢	١
١	٢	٢	٠	١
٢	٠	٠	٢	٢
٢	٠	١	٠	٢
٢	٠	٢	٠	٢

اذن يوجد تفسير ، تصح فيه المسلمتان ٢ و ٣ وتكذب فيه الأولى ؛ وبالتالي فالمسلمة الأولى هي مستقلة .

لتقرير الاستقلال لباقي المسلمات ، نتبع نفس النمط ، مع اختيار المجموعة { ٠ ، ١ ، ٢ } مجالا للتفسير والعدد « ٠ » قيمة ممتازة ، ونأخذ لكل من الرمزين « ⌐ ، ← » على التوالي ، التفسيرين $ف_١$ و$ف_٢$ وفقاً للجداول الآتية :

ب	$\neg_2$ (ب)	$\neg_3$ (ب)
٠	٢	٢
١	١	٢
٢	٠	٢

ب	ج	$\rightarrow_2$ (ب، ج)	$\rightarrow_3$ (ب، ج)
٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١
٠	٢	٢	٢
١	٠	٠	٠
١	١	٠	٠
١	٢	١	٢
٢	٠	٠	٠
٢	١	٠	٠
٢	٢	٠	٠

أنساق أخرى

بالاضافة إلى نسق لوقازيفتش، أقيمت انساق أخرى كثيرة، تتصف معظمها بسائر الخصائص التي أتينا على دراستها . كما أنه وُضعت طرائق استدلال جديدة، تختلف عن الطريقة الأكسيومية . ففي سبيل المقارنة ، نعرض بعضاً منها .

١٨. نسق هلبرت – أكرمن Hilbert - Ackermann

يتخذ هذا النسق رابطي السلب والفصل ، أي { ¬ ، ∨ } ، أساساً له ، وهما ، كما نعلم ، كافيان لتأدية سائر الروابط المنطقية . لذلك ، فحساب الصياغة يختص بالتركيب الآتي :

I الرموز البسيطة : ب ، ج ، د ... ¬ ، ∨ ، (،) .

II قواعد الصياغة :

صغ١ : ⇐ ب

صغ٢ : Φ ⇐ ¬ Φ

صغ٣ : Φ ، Ψ ⇐ (Φ ← Ψ)

أما الحساب الأكسيومي فيحتوي على :

III المسلمات :

سل١ : ب ∨ ب ← ب

سل٢ : ب ← ب ∨ ج

سل٣ : ب ∨ ج ← ج ∨ ب

سل٤ : (ب ← ج) ← (د ∨ ب ← د ∨ ج)

IV قواعد الاستدلال :

قاعدة الابدال وقاعدة الوضع كما في لوقازيفتش .

V التعريفات : نستطيع بسبب التلازم بين الروابط ، أن ندخل منها على قدر ما نشاء ، مثلا :

Ψ V Φ ⌐ ⇋ Ψ ← Φ : عر١

(Ψ ⌐ V Φ ⌐) ⌐ ⇋ Ψ ∧ Φ : عر٢

... الخ .

جدير بالذكر أن مسلمات هلبرت ـ أكرمن مقتبسة عن كتاب « المبادىء الرياضية » لمؤلفيه هوايتهد Whitehead ورسل Russell ، وقد كان نسق « مبادىء الرياضيات » يضم خمس مسلمات ، حُذفت منها واحدة ، هي (ب V (جـ V د)) ← (جـ V (ب V د))، بعد أن أظهر برنايز * امكانية استنباطها عن المسلمات الأخرى .

* P. Bernays : «Axiomatiche untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica» ; Mathematische Zeitschrift, vol. 25, (1926), pp. 305 – 320.

١٩. نسق نيكو Nicod

ينفرد باستعماله مسلمة واحدة ورابطاً واحداً هو منع الوصل « ↑ »، وقوامه كما يأتي :

I الرموز البسيطة : ب ، ج ، د ... ، ↑ ، (،) .

II قواعد الصياغة :

صغ١ : ← ب

صغ٢ : Φ ، Ψ ← (Φ ↑ Ψ)

III المسلمة :

(ب ↑ (ج ↑ د)) ↑ ((و ↑ (و ↑ و)) ↑ ((هـ ↑ ج) ↑
((ب ↑ هـ) ↑ (ب ↑ هـ))))

IV قواعد الاستدلال :

قاعدة الابدال تبقى على ما كانت عليه؛ أما قاعدة الوضع فيستعيض عنها بقاعدة أعم هي :

Φ ، Φ ↑ (X ↑ Ψ) ← Ψ

بينما قاعدة الوضع تؤدّى برابط منع الوصل هكذا :

Φ ، Φ ↑ (Ψ ↑ Ψ) ← Ψ

وواضح أنها حالة خاصة من السابقة .

٧ بخصوص التعريفات ، فإدخالها يكون عن طريق التلازم الذي سبق شرحه في الفصل ٩ .

التقليل من الروابط الأساسية ومن المسلمات في نسق نيكو ، لا يعني أن هذا النسق هو أبسط من غيره من كل النواحي . فإن تركيب المسلمة واحتواءها على خمسة متغيرات ، وكذلك صعوبة القاعدة ، تفقده طابع البداهة والوضوح الذي تتسم به أنساق أخرى .

٢٠ أشكال مسلمات

غالباً ما يُستعاض عن متغيرات القضايا الواردة في المسلمات ، بمتغيرات ماورائية ، فتنشأ عن ذلك صيغ تمثل كل واحدة منها عدداً لامتناهياً مــــن المسلمات . ولهذا تسمى تلك الصيغ « أشكال مسلمات » . فهكذا مثلا ، يمكن عرض نسق لوقازيفتش بالاشكال الثلاثة :

١. $(\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow \Phi$

٢. $((X \leftarrow \Phi) \leftarrow (\Psi \leftarrow \Phi)) \leftarrow ((X \leftarrow \Psi) \leftarrow \Phi)$

٣. $(\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow (\Psi \neg \leftarrow \Phi \neg)$

التي تحدد البنية العامة للمسلمات المندرجة تحتها . فالشكل الأول مثلا يضم مسلمات من هذا التركيب :

ب ← (ج ← ب)

⌐ (ب ← ج) ← (⌐ ج ← ⌐ (ب ← ج))

⌐ ب ← ((ج ← ⌐ (د ← ب)) ← ⌐ ب)

... الخ .

بوجود أشكال مسلمات لا يحتاج النسق سوى قاعدة الوضع . أما قاعدة الابدال فهي متضمنة في المتغيرات الماورائية . وبالتالي يمكن الحصول عليها بواسطة الاشتقاق ، أي انه يمكن اثبات :

إذا ⊢ Ψب . ف ⊢ Ψx:ب

وبالفعل ، كل صيغة جديدة $\Psi_{\text{ب}}$ نحصل عليها ، يكون ذلك بتطبيق قاعدة الوضع على صيغتين سابقتين :

$$\Phi_{\text{ب}}$$

$$(\Phi \rightarrow \Psi)_{\text{ب}}$$

فإذا ابدلنا متغير القضية ب في الصيغ الثلاث بأية صيغة X نحصل على :

$$\Phi_{x/\text{ب}}$$

$$(\Phi \rightarrow \Psi)_{x/\text{ب}}$$

$$\Psi_{x/\text{ب}}$$

والحـــال أن $(\Phi \rightarrow \Psi)_{x/\text{ب}}$ هي $\Phi_{x/\text{ب}} \rightarrow \Psi_{x/\text{ب}}$ نفسها ، إذن $\Psi_{x/\text{ب}}$ تقبل الاستنباط عن $\Phi_{x/\text{ب}}$ و $(\Phi \rightarrow \Psi)_{x/\text{ب}}$ بواسطة قاعدة الوضع . فان كانت $\Phi_{\text{ب}}$ و $(\Phi \rightarrow \Psi)_{\text{ب}}$ من المسلمات ، كانت $\Phi_{x/\text{ب}}$ و $(\Phi \rightarrow \Psi)_{x/\text{ب}}$ كذلك، وبالتالي فَ $\vdash \Psi_{x/\text{ب}}$. وإن كانت إحدى الصيغتين $\Phi_{\text{ب}}$ و $(\Phi \rightarrow \Psi)_{\text{ب}}$ من غير المسلمات، فهي تنجم، بواسطة قاعدة الوضع ، عن متتابعة من الصيغ ، أولها صيغة تتعلق مباشرة بالمسلمات ، لذلك $\vdash \Phi_{x/\text{ب}}$ و $\vdash (\Phi \rightarrow \Psi)_{x/\text{ب}}$، وبالتالي $\vdash \Psi_{x/\text{ب}}$.

في الانساق التي تحتوي على أشكال مسلمات، بدل البرهان على مسائل خاصة مثل « ب ← ب » ، يُفضّل الانطلاق من أشكال المسلمات ، للتوصل إلى عبارات تمثل كل واحدة منها أيضاً عدداً لامتناهياً من المسائل الخاصة التي تندرج تحتها ، منها المسألة الخاصة المطلوبة . فمثلاً ، بدلا من « ب ← ب » ، نحصل بوجه عام على $\Phi \rightarrow \Phi$ هكذا :

١. $((\Phi \leftarrow \Phi) \leftarrow ((\Phi \leftarrow \Phi) \leftarrow \Phi)) \leftarrow ((\Phi \leftarrow (\Phi \leftarrow \Phi)) \leftarrow \Phi)$
شكل مسلمة ٢

٢. $(\Phi \leftarrow (\Phi \leftarrow \Phi)) \leftarrow \Phi$ شكل مسلمة ١

٣. $(\Phi \leftarrow \Phi) \leftarrow ((\Phi \leftarrow \Phi) \leftarrow \Phi)$ ضع ؛ ١ ، ٢

٤. $(\Phi \leftarrow \Phi) \leftarrow \Phi$ شكل مسلمة ١

٥. $\Phi \leftarrow \Phi$ ضع ؛ ٣ ، ٤

فالعبارة $\Phi \leftarrow \Phi$ ونظائرها من العبارات يطلق عليها اسم « اشكال مسائل » . والطريقة التي توصل إليها ، لكونها تبين الشكل العام الذي به يتم البرهان على على كل مسألة جزئية من شكل المسألة ، تسمى كذلك « شكل برهان » .

٢١. حساب الاستنباط الطبيعي

عملية التفكير المنطقي الممارسة في البراهين العلمية ، تبتعد عن الطريقـة الأكسيومية التي توسعنا في عرضها لأغراض منهجية . وبالواقع ، فالتفكير المنطقي لا ينطلق من عدد معين من المسلمات ، بل من أية فرضيات ، يحذف منها أو يضيف إليها مركبات ما ، حتى يتوصل إلى نتائج جديدة مستقلة ، وذلك طبقاً لقواعد موافقة للروابط التي تعرض خلال عملية الانتقال . هذا التعليل هو الذي دفع المنطقي جنتسن * G. Gentzen لأن يقيم بناءً صورياً يعكس بدقة العملية الذهنية المنطقية التي تتفق مع طبيعة البراهين الحقيقية ، أطلق عليه اسم « حساب الاستنباط الطبيعي » .

فعن جنتسن نقتبس الحساب الآتي :

ادخال $\wedge$: $\Psi \wedge \Phi \Leftarrow \Psi ، \Phi$

حذف $\wedge$: $\Phi \Leftarrow \Psi \wedge \Phi$

حذف $\wedge$: $\Psi \Leftarrow \Psi \wedge \Phi$

ادخال $\vee$: $\Psi \vee \Phi \Leftarrow \Phi$

ادخال $\vee$: $\Psi \vee \Phi \Leftarrow \Psi$

حذف $\vee$: $X \Leftarrow X \dashv \Psi ، \Psi \dashv \Phi ، \Psi \vee \Phi$

* G. Gentzen : Untersuchungen über das logische Schliessen. Mathematische Zeitschrift. 39, 1934.

ادخال ← : $\Psi \leftarrow \Phi \Leftarrow \Psi \dashv \Phi$

حذف ← : $\Psi \Leftarrow \Psi \leftarrow \Phi ، \Phi$

ادخال ⌐ : $\Phi \neg \Leftarrow \Psi \neg \dashv \Phi ، \Psi \dashv \Phi$

حذف ⌐ : $\Psi \Leftarrow \Phi \neg ، \Phi$

حذف ⌐ : $\Phi \Leftarrow \Phi \neg \neg$

كيفية استعمال هذه القواعد لا تتطلب شرحاً جديداً على ما سبق لنا معرفته . فقط قاعدة حذف $\vee$ وقاعدة ادخال ⌐ تحتاجان إلى بعض التوضيح. من أجلهما هذان المثلان :

مسألة ١ : $(X \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Phi) \leftarrow (X \wedge \Psi) \vee \Phi$

برهان :

١. $(X \wedge \Psi) \vee \Phi$ فرضية

٢. Φ فرضية

٣. $\Psi \vee \Phi$ ادخال $\vee$ ؛ ٢

٤. $X \vee \Phi$ ادخال $\vee$ ؛ ٣

٥. $(X \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Phi)$ ادخال $\wedge$ ؛ ٣ ، ٤

---

٦. $X \wedge \Psi$ فرضية

٧. Ψ حذف $\wedge$ ؛ ٦

٨. X حذف $\wedge$ ؛ ٦

٩. $\Psi \vee \Phi$ ادخال $\vee$ ؛ ٧

١٠. $X \vee \Phi$ ادخال v ؛ ٨

١١. $(X \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Phi)$ ادخال ٨ ؛ ٩ ، ١٠

١٢. $(X \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Phi)$ حذف v ؛ ١ ، ٢ – ٥، ٦ – ١١ .

١٣. $(X \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Phi) \leftarrow (X \wedge \Psi) \vee \Phi$ ادخال ← ؛ ١ – ١٢

في كل من السطرين ٢ و ٦ ، أخذنا طرفاً من طرفي الصيغة المنفصلة ، حتّى نستنبط منها صيغة واحدة . في السطر ١٢ أثبتنا الصيغة الحاصلة عن كل من طرفي الصيغة المنفصلة، نتيجة للصيغة المنفصلة كاملة، تطبيقاً لقاعدة حذف v . أمـــا وضع فرضية السطر ٦ عـــلى نفس عمود فرضية السطر ٢ ، فللإشارة إلى عدم تعلقها بما سبقها من الصيغ الناجمة عن فرضية السطر ٢ .

مسألة ٢ : $\Phi \neg \leftarrow (\Psi \neg \leftarrow \Phi) \wedge (\Psi \leftarrow \Phi)$

برهان :

١. $(\Psi \neg \leftarrow \Phi) \wedge (\Psi \leftarrow \Phi)$ فرضية

٢. Φ فرضية

٣. $\Psi \leftarrow \Phi$ حذف ٨ ؛ ١

٤. $\Psi \neg \leftarrow \Phi$ حذف ٨ ؛ ١

٥. Ψ حذف ← ؛ ٢ ، ٣

٦. $\Psi \neg$ حذف ← ؛ ٢ ، ٤

٧. $\Phi \neg$ ادخال ⌐ ؛ ٢ – ٦

٨. $\Phi \neg \leftarrow (\Psi \neg \leftarrow \Phi) \wedge (\Psi \leftarrow \Phi)$ ادخال ← ؛ ١ – ٧

في السطر ٢ افترضنا Φ ، فاستنبطنا منها صيغة ونقيضها في السطرين ٤ و ٥ .
لذلك اثبتنا ~ Φ في السطر ٧ مستقلة عن الفرضية Φ، طبقاً لقاعدة ادخال ~

إلى جانب الامكانيات الواسعة في تطبيقه على عمليات التفكير الطبيعية ، يمتاز هذا الحساب عن الانساق الأكسيومية بمنهجية واضحة . فكل رابط منطقي يختص بقاعدة استدلال تحدد ادخاله ، وقاعدة أخرى تحدد حذفه ، مما يضبط ويختصر كثيراً طريقة البرهان ، خلافاً لما يحصل في الإنساق الأكسيومية ، حيث البراهين تفتقر إلى توجيهات صريحة تسهل الوصول إلى المسألة المطلوبة .

• • •

القسم الثاني

مَنطِقُ المحمولات

لغة منطق المحمولات

من الأضرب المنتجة في نظرية القياس ، هذا المثل القديم :

كل انسان فان

سقراط انسان

∴ سقراط فان

فلو اكتفينا بالوسائل ، التي يوفرها لنا منطق القضايا ، للبت في صحة هذا الدليل ، لحصلنا على الجدول الآتي :

ب	٨	جـ	←	د
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ك

الذي يُظهر فساد الصورة « ب ٨ جـ ← د » . ومع ذلك ، فصحة الضرب المذكور ليست عرضة للشك ؛ انما البرهنة عليه تتطلب معرفة العلاقات الحاصلة بين العبارات « انسان » و « سقراط » و« فان » . فهذه ليست قضايا ، بل أجزاء تدخل في تركيب القضية . وبالتالي ، وجب علينا ، حتى نتوصل إلى أدلة صحيحة جديدة ، أن لا نتوقف عند اعتبار القضايا وحدات أولية ، بل نتعدى ذلك إلى تحليل البنية الداخلية للقضية . هذا ما سوف نوجه إليه اهتمامنا الآن .

٢٢. الموضوع والمحمول

القضية « سقراط إنسان » تسمى « القضية المخصوصة » أو « الفردية » ، لأنها تنسب صفة الانسان إلى فرد مخصوص هو سقراط . فكلمة « سقراط » موضوعة للدلالة على شخص واحد فقط. وكذلك هي الحال مع الكلمات « محمد، بيروت ، المريخ ، سبعة ، ... » ، وسائر أسماء العلم . فهذه الكلمات ، التي تستخدمها اللغة لتشير إلى فرد واحد فحسب ، نريد أن نطلق عليها اسم « الموضوعات » . أما كلمة « إنسان » ، فهي علامة لا تقتصر على الدلالة على فرد واحد ، بل عكس اسماء العلم ، يمكن حملها ايجاباً أو سلباً على عدة أفراد . فنقول مثلا :

سقراط انسان

ابن سينا انسان

ابو الهول ليس انساناً

فالكلمات ، التي تتصف بهذه الخاصة ، نسميها « محمولات » . والمحمولات ، قد تؤدى بمقولات لغوية مختلفة ، منها الاسم والفعل والنعت ؛ وقد تؤدى أيضاً بألفاظ مركبة ، كما في الجمل :

سقراط شرب السم

سقراط معلم أفلاطون

٢١ قابلة للانقسام على ٧

فالعبارات « شرب السم » ، « معلم أفلاطون » و « قابلة للانقسام على ٧ » هي محمولات ، لأنها تدل على صفات ، يمكن حملها ايجاباً أو سلباً على أفراد عدة .

في طريقة الكتابة الجديدة ، التي نأخذ بها ، سوف نغير ترتيب الألفاظ ، فنقدم المحمول على الموضوع ، ونحصر هذا الأخير بين قوسين ، فنكتب مثلا :

انسان (سقراط)

انسان (ابن سينا)

انسان (زيد)

... الخ .

عوضاً عن :

سقراط هو انسان

ابن سينا هو انسان

زيد هو انسان

... الخ .

نلاحظ ان القضايا المخصوصة الي ذكرناها ، تشترك ، رغم تباين موضوعاتها ، في بنية واحدة نستطيع أن نرسمها هكذا :

انسان (......)

حيث الفسحة « ...... » تشير إلى الموضوعات المختلفة التي يمكن أن تطرأ على الصيغة . فللدلالة على أي موضوع ، نستعمل بدل الفسحات ، كما فعلنا في منطق القضايا ، الحروف الآتية :

س ، ع ، ف ، ص

وعند الحاجة :

س١ ، س٢ ، س٣ ، ...

ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، ...

ف١ ، ...

فنكتب العبارة السابقة على هذا النحو :

انسان (س)

ونخص هذه الحروف باسم « متغيرات » الموضوع ، لأنها لا تقبل أن يحل محلها إلا موضوعات ، تمييزاً عن متغيرات القضايا التي تقوم مقام القضايا فقط . والموضوع ومتغير الموضوع ندرجهما تحت اسم أعم هو « الحد » .

العبارة « انسان (س) » ليست قولا تاماً متعيناً حتى نعرف صدقها من كذبها ، كما هي الحال مع القضايا « انسان (سقراط) ، انسان (ابن سينا) ، ... الخ » . وانما تصبح قضية صادقة أو كاذبة وفق القيمة أي الموضوع الذي يتعاقب عليه « س » . فإن كان س سقراط ، كانت « انسان (سقراط) » قضية صادقة ، وفي حال كون س أبا الهول ، تكون « انسان (أبو الهول) » قضية كاذبة . ولذلك فالعبارة « انسان (س) » ونظائرها من العبارات غير المتعينة ، نسميها أيضاً « صورة قضية » .

٢٣. السور البعضي والسور الكلي

ثمة قضايا أخرى غير المخصوصة ، يحصل فيها تعيين الموضوع . فمنها ما تبين حمل المحمول على كل موضوع ، كما في قولنا :

كل واحد هو إنسان

كل شيء هو انسان

وباستعمال المتغيرات :

كل س هو إنسان .

والأخرى تصرح بوجود موضوع واحد على الأقل ، يُحمل عليه المحمول ، ومثالها :

البعض هو إنسان

يوجد على الأقل شيء واحد هو إنسان

ومع المتغير

بعض س هو انسان

يوجد على الأقل س واحد ، بحيث أن س هو اسان .

فالعبارات :

كل س هو انسان

بعض س حو انسان

هي قضايا وليست صوراً ، لأننا نستطيع أن نبت إن كانت صادقة أو كاذبة .

في اللغة الرمزية ، سوف نستعيض عن لفظة « كل » برمز جديد هو « ∧ » ، الذي نطلق عليه ، مع مناطقة العرب ، اسم « السور الكلي » . ونؤدي القضية « كل س هو انسان » ، أعني أن كل س ، إن كان موجوداً ، فـ س هو إنسان بـ :

$\bigwedge_{س}$ انسان (س) .

أما كلمة « بعض » ومترادفاتها « يوجد واحد على الأقل » ... الخ ، فنرمز إليها بـ « ∨ » ، واسمه « السور البعضي » أو « السور الوجودي » . ونكتب القضية « بعض س هو انسان » ، بمعنى أنه يوجد س واحد على الأقل ، بحيث أن س هو انسان ، على الوجه التالي :

$\bigvee_{س}$ انسان (س)

فإدخال السور على صورة القضية يُدعى « التقييد » أو أيضاً « التسوير » ، والمتغير الواقع تحت أحد الأسوار « متغيراً مقيداً » . أما المتغير الذي ليس له سور ، كما في الصورة :

انسان (س)

فيسمى « متغيراً مطلقاً » .

من الواضح أن رمزي السورين ، الكلي « ∧ » والبعضي « ∨ » ، يشبهان إلى حد بعيد رابطي الوصل « ∧ » والفصل « ∨ » ؛ فشكلهما ليس إلا تكبيراً لشكل الرابطين . وتعليل هذا الاختيار يقوم على أنه ، عند افتراض مجال متناه للمتغير « س » ، أي مجموعة متناهية من الموضوعات التي يمكن أن تحل محله ، لنقل { $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ } ، حيث كل « $س_{ي}$ » يختصر موضوعاً ثابتاً ، يكون مرجع القضية الكلية « $\bigwedge_{س}$ انسان (س) » إلى الوصل بين ن قضية على هذا النحو :

انسان ($س_{1}$) ٨ انسان ($س_{2}$) ٨ ... ٨ انسان ($س_{ن}$)

ومرجع القضية البعضية « $\bigvee_{س}$ انسان (س) » إلى الفصل ما بين القضايا المخصوصة:

انسان ($س_{1}$) ٧ انسان ($س_{2}$) ٧ ... ٧ انسان ($س_{ن}$) .

ولكن ، بما أن الموضوعات التي يحتملها « س » قد تكون غير متناهية ، فإننا نواجه مسألة جديدة ، هي الوصل والفصل اللامتناهيان . لهذا كان لا بد من اللجوء إلى الأسوار . فالقضية المسورة إذن ، هي ، من وجهة نظر المنطق الحديث ، قضية مركبة وليست بسيطة ، كما كان ينظر إليها المنطق القديم ، الذي لم يكن يعتبر مركباً ، إلا ما دخلت عليه الروابط .

٢٤. القضايا التقليدية الأربع

يقسم المنطق التقليدي القضية ، المسماة بالحملية ، إلى أربعة أصناف ، هي :

١. القضية الكلية الموجبة ، ومثلها : كل إنسان فان

٢. الكلية السالبة ، ومثلها : لا إنسان حجر

٣. الجزئية الموجبة : بعض الحيوان هو انسان

٤. الجزئية السالبة : بعض الحيوان ليس بإنسان

وهذه ، في عرفه، تضم، علاوةً على السور والرابطة الظاهرة أحياناً في اللغة العربية بواسطة الضمائر ، ركنين رئيسيين هما المحكوم عليه ويسمى «الموضوع» والمحكوم به ويسمى « المحمول » . ونحن ، رغم أننا استعرنا لفظتي «الموضوع » و « المحمول » منه ، فان تعريفنا لهما يختلف . فمن جهة يطلق هو التسمية ، كما يفعل دائماً ، على المعاني وليس على الألفاظ . ومن جهة أخرى ، فالمحكوم عليه في الأمثلة السابقة هو في ١ و ٢ الانسان ، وفي ٣ و ٤ الحيوان . وهذه الألفاظ ، وفقاً لتعريفنا ، هي محمولات وليست موضوعات ، إذ يمكن حملها على أفراد كثيرين. وفوق ذلك، فالقضايا الأربع ، التي يعتبرها المنطق التقليدي بسيطة ، ستبدو عند التحليل مركبة من عدة نواحٍ .

لترجمة القضايا المذكورة إلى اللغة الرمزية ، كان لا بد لنا أن نقرر ، بالتفصيل ، المقصود من كل واحدة منها . فالأولى ، أي :

كل انسان فان

تعني : كل واحد مما هو انسان فهو فان

أي : كل شيء ، إن وجد هذا الشيء وكان انساناً ، فهذا الشيء فان.

وباستعمال الرموز : كل سـ ، إذا كان سـ انساناً فَـ سـ فان

كل سـ ، سـ انسان ← سـ فان

واخيراً : $\bigwedge_{س}$ (انسان (سـ) ← فان (سـ))

فالقوسان الأول والأخير ، يحددان هنا مجال السور الكلي ، بحيث أن سائر المتغيرات الواقعة بينهما ، ومن نوع المتغير الذي يعلوه السور ، تكون مقيدة بهذا السور . ومجال التقييد له أهمية كمجال الربط ، إذ به تتعين بنية القضية ومدلولها . فإذا كتبنا ، على سبيل المثال :

$\bigwedge_{س}$ (انسان (سـ) ← حجر (سـ))

عنينا أن كل انسان هو حجر ؛ وهذا واضح أنه كاذب . بينما حين نكتب :

$\bigwedge_{س}$ انسان (سـ) ← $\bigwedge_{س}$ حجر (سـ)

كان مجال السور الأول « انسان (سـ) » فقط ، ومجال السور الثاني « حجر (سـ) » . وهو تركيب ، يقابله في العربية قولنا :

إذا كان كل شيء انسانا فكل شيء حجر

الذي هو صادق. لأن المقدم « $\bigwedge_{س}$ انسان (سـ) » كاذب ، وكذلك التالي « $\bigwedge_{س}$ حجر (سـ) » كاذب ، وعليه فالقضية الشرطية « $\bigwedge_{س}$ انسان (سـ) ← $\bigwedge_{س}$ حجر (سـ) » هي صادقة .

فيما يخص القضيةِ الثانية ، أي الكلية السالبة ، ومثلها :

لا إنسان حجر

فلفظة « لا » ، حين يُكتفى بها لتأدية هذه القضية في اللغة العربية ، تتضمن أكثر من معنى النفي . وهذا بارز في مقابلاتها في بعض اللغات الأوروبية ، مثل «nullus» في اللاتينية و«aucun» في الفرنسية و «kein» في الألمانية... الخ. فالقضية الكلية السالبة يمكن تحليلها بالتدريج هكذا :

لا واحد من الانسان بحجر

أي : كل شيء ، إذا كان هذا الشيء انساناً فليس هذا الشيء حجراً.

وبالرموز : كل س ، س هو انسان ← ليس س حجراً

$\bigwedge_{\text{س}}$ (انسان (س) ← ⌐ حجر (س)) .

أما القضيتان الجزئيتان ، فمثل الموجبة منها :

بعض الحيوان هو انسان

نعني به : يوجد شيء واحد على الأقل ، بحيث أن هذا الشيء هو حيوان وانسان معاً .

يوجد س واحد على الأقل ، بحيث أن س هو حيوان و س انسان .

$\bigvee_{\text{س}}$ (حيوان (س) ٨ انسان (س))

حيث مجال السور البعضي يضم سائر العبارة « حيوان (س) ٨ انسان (س) » . يجب التنبه إلى أن تركيب هذه القضية ونظائرها ، يختلف عن قولنا « بعض س هو كذا وبعض س هو كذا » . فبينما يظهر كذب زعمنا أن :

$\bigvee_{\text{س}}$ (حيوان (س) ٨ حجر (س))

أي بعض الحيوان هو حجر ، يصدق قولنا :

$\bigvee_{س}$ حيوان (سـ) $\wedge$ $\bigvee_{س}$ حجر (سـ)

أعني البعض هو حيوان والبعض هو حجر

وأخيراً فالجزئية السالبة :

بعض الحيوان ليس بإنسان

تجد لها هذا العرض المفصل :

يوجد شيء واحد على الأقل ، بحيث أن هذا الواحد هو حيوان وليس هو إنسانا .

يوجد سـ واحد على الأقل بحيث أن : سـ هو حيوان وليس سـ انساناً.

$\bigvee_{س}$ (حيوان (سـ) $\wedge$ $\sim$ انسان (سـ)) .

على ضوء هذا التحليل ، يتضح لنا أن القضايا التقليدية الأربع هي مركبة ، ليس فقط بالنسبة لدخول الأسوار عليها ، بل أيضاً لاحتوائها على الروابط . فبينما القضايا الكلية تستدعي رابط الشرط ، تحتاج الجزئية إلى رابط الوصل .

حتى الآن استعملنا محمولات معينة مثل « انسان » و « فان » و« حيوان » ... الخ ، لاظهار بعض أصناف القضايا . ولكن أرسطو نفسه في قسمته الرباعية لم يكن مقصوده قضايا ذات محمولات معينة ، بل بالأحرى أربعة أنواع من صور القضايا ، ولهذا كان يستعين بأحرف للدلالة على أية صفة من الصفات دون تخصيص . ونحن كذلك نريد أن نستعمل ما نسميه بـ « متغيرات المحمول » أي رموز تتقبل أن يحل محلها فقط محمولات . فلهذه المهمة نختار الأحرف الآتية :

ك ، ل ، م ، ن

ونكتب صور القضايا التقليدية الأربع على هذا الوجه :

⋀س (ك (س) ← ل (س))   التي نقرأها   كل ك هو ل

⋀س (ك (س) ← ~ ل (س))   »   »   لا ك هو ل

⋁س (ك (س) ∧ ل (س))   »   »   بعض ك هو ل

⋁س (ك (س) ∧ ~ ل (س))   »   »   بعض ك ليس ل

فهذه العبارات ونظائرها التي تحتوي على المتغيرات «ك ، ل ، م ، ن» هي أيضاً صور، لأن مدلولها لا يتعين إلا حين احلال محمولات محل المتغيرات المذكورة .

في محاولة تأدية القضايا الأربع باللغة الرمزية، لم نحتج إلا لسور واحد. ولكن على كثير من العبارات قد تدخل عدة اسوار . فقولنا مثلا :

إما كل الناس بيض أو بعض الناس سود

الذي يأخذ هذه الترجمة :

⋀س (انسان (س) ← أبيض (س)) ∨ ⋁ (انسان (س) ∧ أسود (س))

يحتوي على سورين . وأيضاً فالقضية :

إذا وقعت جريمة ولم يشتك أحد، فكل من شاهد الجريمة هو جبان أو شريك،

نجد عند تحليلنا لها أنها تتضمن ثلاثة أسوار ، إذ هي بلغتنا الدقيقة تؤدى على هذا الشكل :

⋁س جريمة (س) ∧ ¬ ⋁س يشتكي (س) ← ⋀س (شاهد الجريمة (س) ← جبان (س) ∨ شريك (س)) .

أحياناً ما تكون الاسوار في اللغة الطبيعية متسترة بعبارة أو بهيئة الجملة . وقد تقوم ذات اللفظة مقام السور البعضي تارة ومقام السور الكلي طوراً . هذا ما يمكن تحققه من مقارنة معنى كلمة « وقعت » في المثل الأخير وفي الجملة الآتية :

إذا وقعت جريمة فهي تستوجب العقاب

فإذا فسرنا هذه القضية على انها وجودية ورمزنا إليها بـ :

⋁س (جريمة (س) ← تستوجب العقوبة (س))

لكان ذلك يعني أنه يوجد على الأقل شيء واحد يستوجب العقوبة إذا ما كان هذا الشيء جريمة ، وهذا طبعاً ليس المعنى المراد . بل بالأحرى فالقضية تقصد أن كل جريمة تستوجب العقوبة ، أي :

⋀س (جريمة (س) ← تستوجب العقوبة (س)) .

وعلى العموم فنقل الجمل من اللغة الطبيعية إلى الرمزية ليس باليسير ، إذ بينما تركيب الجمل في الأولى يحتمل تقاليب كثيرة ، ويخضع لتحويلات متشعبة من تأخير وايجاز واضمار واطناب ... الخ ، لا تسمح له أن يتخلص كلياً من الغموض ، فاللغة الرمزية تعتمد على معايير قليلة ، ثابتة وشاملة ، بحيث لا يتسع معها أي مجال للإشكال .

٢٥. المحمولات الثنائية فما فوق

يتوقف المنطق التقليدي ، في تحليله للتركيب الداخلي للقضية ، عند تمييز ركنين فقط ، هما الموضوع والمحمول ، كما جرينا على ذلك حتى الآن . وهو يبني كل الأقيسة على هذا التقسيم الثنائي ، ويحاول تطبيقه على شتى أنواع الأدلة . وقد ساد الاعتقاد بين الفلاسفة ، حتى القرن التاسع عشر ، بأن نظرية القياس الأرسطية استنفدت جميع العمليات المنطقية الصورية. فقد زعم كانط في مقدمة كتابه « نقد العقل البحت » بأنه « لمن المدهش حقاً ، أن علم المنطق لم يَخْطُ حتى الآن خطوة واحدة إلى الأمام ، وكل الدلائل تشير إلى أنه بلغ الختام والكمال » . ولكن في الواقع ، يتضح نقصان وعدم كفاية المنطق الأرسطي حتى في علاقات منطقية بسيطة ؛ فهو ، كما يورد دي مورغان ، عاجز مثلا عن تبيان صحة الدليل الآتي :

كل حصان هو حيوان

∴ كل رأس حصان هو رأس حيوان

لأن صحة هذا الدليل لا تقوم على صفات قارة في الأفراد ، بل على علاقات تربط بين عدة أفراد . وكذلك ، فالدليل الآتي :

س أكبر من ع

ع أكبر من ف

∴ س أكبر من ف

هو ، لا شك ، صحيح بالنسبة لكل س وكل ع وكل ف؛ ولكن الاكتفاء بالتحليل السابق ، الذي يقابل تقسيم القضية في المنطق الأرسطي إلى موضوع ومحمول ،

لن ينجح في تبيان هذا العموم بالنسبة لكل الحدود . لأنه ، إذا اعتبرنا الألفاظ المركبة « أكبر من ع » و « أكبر من ف » محمولين ، يشكل كل منهما وحدة لا تتجزأ ، كما هو في مقدورنا حتى الآن ، لامكن تعميم الدليل السابق على هذا الشكل :

∧_س ك (س)

∧_ع ل (ع)

∴ ∧_س ل (س)

ولتعذر إظهار العموم بالنسبة إلى « ع » في القضية الأولى ، وإلى « ف » في القضيتين الاخيرتين . في تراكيب أخرى ، تعتمد الصحة على وجود علاقات قائمة بين أكثر من حدين ؛ فصحة القضية الهندسية الآتية :

إذا كانت س تقع بين ع و ف فـ س تقع بين ف و ع

منوطة بتمييز العلاقة الثلاثية بين كل من الموضوعات « س » و « ع » و « ف » . ولكن الوسائل الحالية عاجزة عن تأدية ذلك ، بالوجه الكلي المقصود من القضية والذي يُظهر خاصة التناظر للعلاقة : وقع بين . لذلك كان لا بد ، للتوصل إلى تأدية أمثال هذه القضايا والأدلة ، من توسيع اللغة الرمزية ، حتى تشملَ سائر أنواع المحمولات .

لنقابل بين القضيتين :

أفلاطون فان

و : أفلاطون تلميذ سقراط

إلى الآن ، توقفنا عند اعتبار اللفظ المركب « تلميذ سقراط » محمولا واحداً مثل « فان » ، ولكن « تلميذ سقراط » يقبل أيضاً التحليل إلى عنصرين : « سقراط » ، الذي هو من الموضوعات ، و« تلميذ » ، وهو من صنف المحمولات ، إذ يمكن حمله على عدة أفراد . ومع أن المحمول « تلميذ » غير مركب ، فهو يختلف عن « فان » ، لأنه يدل على علاقة بين موضوعين ، هما أفلاطون وسقراط . وكذلك شأن العبارات « يعشق » و« أكبر من » و« أخو » ، كما في قولنا :

قيس يعشق ليلى

٦ أكبر من ٢

الحسن أخو الحسين

فهذه محمولات تدل على نسبة حاصلة بين موضوعين . وبالاختصار محمولات ثنائية . للاشارة إلى التركيب المذكور ، سوف نضع على التوالي المحمول ثم الموضوعات بين قوسين وفق ترتيبها الأصلي ، فنكتب القضايا السابقة هكذا :

تلميذ (أفلاطون ، سقراط)

يعشق (قيس ، ليلى)

أكبر من (٦ ، ٢)

أخو (الحسن ، الحسين) .

في اللغات الطبيعية ، قد تخدعنا البنية اللغوية الظاهرة . فالقضيتان :

عادل وسمير مجتهدان

عادل وسمير صديقان

يتشابهان في التركيب ، إلى درجة أنه قد يُتوهم أن اللفظتين « مجتهد »و«صديق » هما من صنف واحد . والواقع أن القضية الأولى تختصر قولنا :

عادل مجتهد وسمير مجتهد

أي :

مجتهد (عادل) ٨ مجتهد (سمير)

ومنه يُستبان أن لفظة « مجتهد » هي محمول أحادي ، أعني يُحمل على موضوع واحد . بينما لفظة « صديق » تشير إلى علاقة حاصلة بين عادل وسمير . وبالتالي فالقضية الثانية تجد لها في لغتنا هذا النقل :

صديق (عادل ، سمير) ٨ صديق (سمير ، عادل) .

ثمة ألفاظ تدل على علاقة بين أكثر من موصوعين ، ففي الجمل :

تقع تونس بين ليبيا والجزائر

سلم يهوذا المسيح إلى بيلاطس

العبارات « تقع بين » و « سلم إلى » تربط بين ثلاثة موضوعات ، هي في الجملة الأولى « تونس » و« ليبيا » و« الجزائر » ، وفي الثانية « يهوذا » و« المسيح » و« بيلاطس » . فلإبراز هذا التركيب ، نعتمد الترتيب الآتي :

تقع بين (تونس ، ليبيا ، الجزائر)

سلم إلى (يهوذا ، المسيح ، بيلاطس) .

وكذلك قد تقوم علاقات بين أربعة أفراد ، ففي قولنا :

اشترت اميركا ألاسكا من روسيا بسبعة ملايين دولار

يؤلف المركب اللفظي « اشترت من بـِ » محمولا رباعياً ، وتأخذ كتابة الجملة في لغتنا النَّظم الآتي :

اشترت من بـِ (أميركا ، ألاسكا ، روسيا ، سبعة ملايين دولار) .

وهكذا يظهر لنا إلتحليل محمولات تربط بين أي عدد من الحدود . فحسب تدرج عدد هذه الحدود ، نصنّف المحمولات على التوالي إلى محمولات أحادية ، ثنائية ، ثلاثية ، رباعية ، خماسية ... الخ . لمتغيرات المحمول الثنائية فما فوق ، نستعمل متغيرات المحمول الأحادي ملحقة بالحدود التي تسند اليها كما يأتي :

ك (س) ، ل (س) ، م (س) ، ...

ك (س ، ع) ، ل (س ، ع) ، ...

ك (س ، ع ، ق) ، ل (س ، ع ، ق) ، ...

....

وعند الحاجة ، ندخل عليها ، من الجانب الأعلى ، أرقاماً تشير إلى عدد الحدود التي تُحمل عليها ؛ ومن الجانب الأسفل ، أرقاماً تميز بين المحمولات من ذات المرتبة ، على هذا الوجه :

$ك^{١}_{١}$ ، $ك^{١}_{٢}$ ، $ك^{١}_{٣}$ ، ...

$ك^{٢}_{١}$ ، $ك^{٢}_{٢}$ ، $ك^{٢}_{٣}$ ، ...

$ك^{٣}_{١}$ ، $ك^{٣}_{٢}$ ، ...

....

$ل^{١}_{١}$ ، $ل^{١}_{٢}$ ،... $ل^{٢}_{١}$ ... $ل^{٣}_{١}$ ...

$م^{١}_{١}$ ، $م^{١}_{٢}$ ،... $م^{٢}_{١}$ ... $م^{٣}_{١}$ ...

أسوة بالمحمولات الأحادية ، يمكن أن تدخل المحمولات الثنائية فما فوق في تركيب مع المتغيرات والأسوار . فنحصل على قضايا مسورة ، وعلى صور قضايا ، إن وُجدت متغيرات لا يقع عليها التقييد . لنحاول ترجمة بعض الصيغ من اللغة الطبيعية إلى لغتنا الموسعة . فالقضية :

المعري له أب

تعني أنه يوجد فرد ما هو أب للمعري ، أي :

يوجد س ، بحيث أن س هو أب للمعري

وباللغة الرمزية :

$\bigvee_{س}$ أب (س ، المعري)

وفي هذه القضية ، يقيد السور البعضي الحد الأول . مقابل ذلك ، قولنا :

ليس المعري أباً لأحد

يرجع تحليله إلى أنه :

لا يوجد س ، بحيث ان المعري هو أب لِـ س

$\sim \bigvee_{س}$ أب (المعري ، س)

وفيه يقع السور على الحد الثاني . من هذين المثلين ، تظهر لنا أهمية ترتيب الحدود في العلاقات ، إذ قد تصدق قضية تختلف فقط بترتيب الحدود ، عن أخرى كاذبة .

في بعض القضايا ، قد يقيد السور الواحد الحدين معاً ، فالمبدأ :

كل شيء مساو لذاته

يدل على علاقة بين أي شيء س والشيء س نفسه ؛ أي ان :

كل س هو مساو لِ س

وبالرموز :

$\bigwedge_{\text{س}}$ مساو (س ، س)

حيث يتضح تقيد المتغير المتكرر بنفس السور الكلي . لا شك ان كثيراً من العبارات تتطلب متغيرات موضوع مختلفة ، وبالتالي عدة أسوار ، فمبدأ السببية :

لكل شيء علة

يعني بالتفصيل :

لكل واحد من الاشياء ، يوجد شيء هو علة له

لكل س يوجد ع ، بحيث أن ع هو علة س

وهو قول يحتوي على سورين ، الكلي والبعضي ، اللذين نرتبهما في اللغة الرمزية على الشكل الآتي :

$\bigwedge_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}}$ علة (ع ، س) .

وترتيب الأسوار ، عند تعددها ، يدل على منزلتها من التطبيق على المتغيرات ففي هذه الصيغة ، يحتل السور البعضي المنزلة الأولى ، أي أن التقييد يبدأ به أولا ، ثم بالسور الكلي ؛ ولذلك قد يؤدي الاختلاف في ترتيب الاسوار ، إلى اختلاف في المدلول ، فلو كتبنا :

$\bigvee_{ع} \bigwedge_{س}$ علة (ع ، س)

لكان معى هذا أن هناك علة لكل الاشياء معاً . والفرق بين الحكمين ليس خفياً عن علم الماورائيات .

في المحمولات الثلاثية ، يمكن بالطبع تركيب ثلاثة أسوار متتالية ، على مختلف التقاليب ، منها مثلا هذه الصيغ :

$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \bigwedge_{ف}$ ك (س ، ع ، ف)

$\bigvee_{س} \bigwedge_{ع} \bigvee_{ف}$ ك (س ، ع ، و)

$\neg \bigwedge_{س} \neg \bigvee_{ع} \bigwedge_{ف}$ ك (س ، ع ، ف)

وعلى هذا المنوال ، يزداد عدد الاسوار بازدياد حدود المحمولات .

حتى الآن ، اقتصرت امثلتنا من اللغة الطبيعية على شواهد ذات عموم مطلق؛ والحال أن اغلب الاحكام تتخصص بفئة من الاشياء ، أو تتقيد بشرط ما فقولنا :

كل انسان له أب

يعني ان :

كل ما هو انسان فله أب

وبالتالي :

كل س ، إذا كان س انساناً فثمة ع هو أب لـ س

وبالرموز :

$\bigwedge_{س}$ (انسان (س) ← $\bigvee_{ع}$ أب (ع ، س)) .

مثلٌ آخر :

كل فتى يعشق فتاة

نفهم به أن لكل ما هو فتى ، ثمة فتاة يعشقها . فلتيسير الترجمة إلى اللغة الرمزية ، يحسن الانتقال بالتدرج ، فيمكن أولا أن نؤدي القضية هكذا :

$\bigwedge_{س}$ ((س فتى) ← (س يعشق ثمة فتاة))

ثم نجد أن تالي الشرطية يقبل بعد ، في اللغة الرمزية ، هذا التفصيل :

$\bigvee_{ع}$ (فتاة (ع) ∧ يعشق (س ، ع))

وبذلك ، فالنقل التام يصبح :

$\bigwedge_{س}$ (فتى (س) ← $\bigvee_{ع}$ (فتاة (ع) ∧ يعشق (س ، ع))) .

غالباً ما ينعدم التساوق بين اللغة الطبيعية واللغة الرمزية ، في ترتيب العبارات وطولها . فالترجمة الحرفية قد تغير المعنى الأصلي ، كما هي الحال بين كثير من اللغات الطبيعية . فلو استندنا إلى نظم اللغة العربية ، وترجمنا قولنا :

لكل انسان هواية يفضلها على سائر أشغاله

بِـ :

$\bigwedge_{س}$ $\bigvee_{ع}$ $\bigwedge_{و}$ (انسان (س) ∧ هواية (ع) ∧ شغل (و) ←

فضل على (س ، ع ، و))

لجاءت الترجمة أعم من المقصود في القول الأصلي . إذ هي تعني على وجه التدقيق بأنه ، لكل انسان ، يوجد شيء ما ، بحيث إذا كان هذا الشيء هواية ، فهو يفضله على سائر اشغاله . بينما حكمنا السابق يفيد أكثر من ذلك ، فهو يؤكد وجود هواية ، لكل انسان ، هي في ذات الوقت مفضلة على سائر أشغاله . وبالتالي ، فالترجمة الصائبة تكون :

⋀(س) ⋁(ع) ⋀(ف) (انسان (س) ∧ شغل (ف) ← هواية (ع) ∧ فضل على (س، ع، ف)).

هذه الفروق البسيطة ، التي قد تضيع أحياناً في النقل بين اللغات الطبيعية ، لا بد من أن تبرز عند النقل إلى لغة دقيقة كاللغة الرمزية ، ولذلك فالترجمة إلى هذه اللغة تستوجب فهماً سوياً للجمل ، يعطي العبارات التصنيف الملائم ، ويحدد العلاقات ما بينها . لنعتبر القضية الآتية :

كل بلد له سفير في كل عاصمة

فالظاهر يوحي بأن لفظة « سفير » هي محمول أحادي . لكن التحليل يقودنا إلى تصنيفها بين المحمولات الثنائية ، وذلك للاشارة إلى صلة السفير بالبلد . وحرف الـ « في » أيضاً يقوم بدور العلاقة ، إذ يربط بين السفير والعاصمة . وعليه يمكن ترجمة القضية إلى :

⋀(س) ⋀(ع) ⋁(ف) (بلد (س) ∧ عاصمة (ع) ← (سفير (ف، س) ∧ في (ف، ع))

مع تأخير لفظة « سفير » ، استناداً إلى نفس التعليل ، الذي دعانا الى تغيير الترتيب في المثل السابق . بنوع اجمالي ، تطابق هذه الترجمة النص الأصلي؛ ولكن هذا الأخير يضمر بعض المعاني الاضافية ، إذ هو يفترض ضمنياً أن لكل بلد سفيراً ، في كل عاصمة من عواصم البلاد الأخرى . فإن أردنا أن نصرح بها في الترجمة ، لوجب اظهار علاقة العاصمة بالبلد ، واستثناء عاصمة البلد

التي منها السفير من سائر العواصم الأخرى . نظراً إلى ذلك ، تتعقد الترجمة وتصبح :

$\bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \bigwedge_{\text{ف}} \bigvee_{\text{ص}}$ (بلد (س) ٨ بلد (ع) ٨ مختلف عن (س ، ع) ٨
عاصمة (ف ، ع) ← سفير (ص ، س) ٨ في (ص ، ف))

نلاحظ ، من الصيغتين الأخيرتين ، أن تكرار الأسوار لا يتوقف على مرتبة المحمولات من جهة كونها أحادية أو ثنائية أو ثلاثية الخ ... ، بل على ورود متغيرات مختلفة ؛ فواحدة تقتضي ثلاثة أسوار متتالية ، والأخرى أربعة ، مع أن أكبر مرتبة بين المحمولات ، التي تدخل في تركيب كل منهما ، لا تتعدى الحدين .

٢٦. حساب الصياغة

قادنا النظر في اللغة الطبيعية وفي بعض أنواع الحجج ، إلى ضرورة تحليل البنية الداخلية للقضية، ومن ثم إلى توسيع اللغة الرمزية، بإدخال عبارات جديدة عليها من محمولات وأسوار . وقد تعرفنا ، في الفصل السابق ، بالأمثلة والشواهد وبعض الاصطلاحات ، على كيفية فهم وتركيب صيغ هذه اللغة ، في وجه اجمالي . أما مهمتنا الآن فتقوم على بناء لغة صورية لمنطق المحمولات : نحدد لها ، في باب الدلالة، المفاهيم الخاصة بهذا العلم من تفسير وصحة ولزوم... الخ، ثم نُعنى بعد ذلك ، بوضع نسق أكسيومي ، والبحث في النظريات المترتبة عنه . وأخيراً ، ندرس الصلات القائمة بين الوجهتين النحوية والدلالية : كما فعلنا بالنسبة إلى منطق القضايا .

لنبدأ أولا بصياغة اللغة . فلهذا الغرض يلزمنا وضع حساب . وهو ، كما نعلم ، يحتوي على الرموز البسيطة التي تتركب منها الصيغ ، وعلى القواعد التي تضبط تركيب الصيغ .

I الرموز البسيطة :

١. الروابط : $\neg$ ، $\leftarrow$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ... الخ .
الأسوار : $\bigwedge$ ، $\bigvee$.
الأقواس : (،) .

٢. متغيرات قضايا : ب ، ج ، د
ب$_{١}$ ، ج$_{١}$ ، د$_{١}$
ب$_{٢}$ ، ج$_{٢}$ ، د$_{٢}$
...

٣. متغيرات موضوع : س ، ع ، ف

$س_{١}$ ، $ع_{١}$ ، $ف_{١}$

$س_{٢}$ ، $ع_{٢}$ ، $ف_{٢}$

...

٤. متغيرات محمول :

أحادية : ك ، ل ، م

$ك^{١}_{١}$ ، $ل^{١}_{١}$ ، $م^{١}_{١}$

$ك^{١}_{٢}$ ، $ل^{١}_{٢}$ ، $م^{١}_{٢}$

....

ثنائية : ك ، ل ، م

$ك^{٢}_{١}$ ، $ل^{٢}_{١}$ ، $م^{٢}_{١}$

$ك^{٢}_{٢}$ ، $ل^{٢}_{٢}$ ، $م^{٢}_{٢}$

....

ثلاثية : ك ، ل ، م

$ك^{٣}_{١}$ ، $ل^{٣}_{١}$ ، $م^{٣}_{١}$

$ك^{٣}_{٢}$ ، $ل^{٣}_{٢}$ ، $م^{٣}_{٢}$

....

....

وفوق ذلك ، نحصي مع الرموز ، دون تعيين ، أي عدد من ثوابت الموضوعات والمحمولات .

II القواعد : لتأدية القواعد ، نريد أن نستعين بهذه المتغيرات الماورائية الجديدة . فنضع حرف أل «**س**» الغليظ ، للاشارة إلى أي متغير موضوع

« س ، س$_1$ ، س$_2$ ؛ ... ، ع ، ع$_1$ ... » ؛ وحرف الـ « ح » الغليظ للاشارة إلى أي حد بنوع عام ، وهو يقتصر هنا على الموضوعات ومتغيرات الموضوع ؛ وحرف الـ « ك » الغليظ للاشارة إلى أي محمول أو متغير محمول .

صغ$_1$: ⇐ ب

أي انه يجوز دوماً الشروع بأي متغير قضية . وبقول آخر ، فمتغيرات القضايا تنتمي إلى صيغ اللغة .

صغ$_2$: ⇐ ك^{ن} (ح$_1$ ، ح$_2$ ، ... ح$_{ن}$)

كذلك من صيغ اللغة ، العبارات المركبة من محمول أو متغير محمول ك^{ن} ، يتبعه بين قوسين ن حد .

صغ$_3$: Φ ⇐ ~ Φ

صغ$_4$: Φ ، Ψ ⇐ (Φ ر$_2^2$ Ψ)

أي انه يجوز الانتقال من اية صيغتين Φ و Ψ ، سبق الحصول عليهما ، إلى الصيغة (Φ ر$_2^2$ Ψ) ، حيث ر$_2^2$ يمثل احد الروابط المنطقية .

صغ$_5$: Φ ⇐ $\bigwedge_{س}$ Φ

صغ$_6$: Φ ⇐ $\bigvee_{س}$ Φ

القاعدتان صغ$_5$ وصغ$_6$ تسمحان بتركيب صيغة جديدة ، بإضافة احد السورين مقروناً بمتغير ما س ، على أية صيغة سبق الحصول عليها.

من صيغ لغة منطق المحمولات ، العبارات الآتية :

ك (س ، ع) ، ~ ~ ك (س) ،

$\bigwedge_{ق}$ ل (س ، ع) ، $\bigwedge_{س}$ ~ $\bigvee_{ع}$ ~ (ل (س ، ع) ← م (ع)) ،

($\bigvee_{ف}$ ل (ف) ∧ م (ف ، س)) ، $\bigwedge_{س}$ (ك (س) ← (ب ∨ ¬ $\bigvee_{ع}$ ل (س،ع))) .

فاشتقاق الأخيرة مثلا ، يجري على النحو التالي :

١.	ك (س)	صغ$_{٢}$
٢.	ب	صغ$_{١}$
٣.	ل (س ، ع)	صغ$_{٢}$
٤.	$\bigvee_{ع}$ ل (س ، ع)	صغ$_{٦}$ ؛ ٣
٥.	¬ $\bigvee_{ع}$ ل (س ، ع)	صغ$_{٣}$ ؛ ٤
٦.	(ب ∨ ¬ $\bigvee_{ع}$ ل (س ، ع))	صغ$_{٤}$ ؛ ٢ ، ٥
٧.	(ك (س) ← (ب ∨ ¬ $\bigvee_{ع}$ ل (س،ع)))	صغ$_{٤}$ ؛ ١ ، ٦
٨.	$\bigwedge_{س}$ (ك(س) ← (ب ∨ ¬ $\bigvee_{ع}$ ل (س،ع)))	صغ$_{٥}$ ؛ ٧

للتوفير من الأقواس ، سوف نراعي في منطق المحمولات ، الاصطلاحات الاضافية التي أخذنا بها في منطق القضايا ، فنهمل القوسين الخارجيين ، ونعتبر أن « ∨ ، ∧ » يربطان أقوى من « ← و ↔ ». تبعاً لذلك نختصر كتابة الصيغتين الأخيرتين من الأمثلة السابقة بـ :

⋁[ف] ل (ف) ٨ م (ف ، س)

⋀[س] (ك (س) ← ب ٧ ~ ⋁[ع] ل (س ، ع)).

بشأن دخول الاسوار على المتغيرات ، نحتاج إلى ضبط بعض المفاهيم فالمتغير الذي يقع تحت سور أو في نطاق سور ، نسميه « متغيراً مقيداً » ، وإلا فهو متغير مطلق . وعليه فمتغيرات القضايا والمحمولات ، في اللغة التي وضعناها ، هي دوماً مطلقة ؛ بينما متغيرات الموضوع قد تقع إما مطلقة وإما مقيدة . ففي الصيغة :

⋀[س] (ك (س) ٧ ~ ل (س ، ع)) ← ⋁[ع] م (ع ، ف)

المتغير « س » هو مقيد في كل مواقعه ، لانه في الموقع الأول تحت السور ، وفي الاثنين الآخرين ضمن نطاق السور : والمتغير « ف » لا يقع إلا مطلقاً . أما المتغير « ع » فهو مطلق في موقعه الأول ، ومقيدٌ بالسور البعضي في المواقع الأخرى، مما يدل على أنّ نفس المتغير قد يقع مطلقاً ومقيداً معاً في صيغة واحدة. فان كانت صيغة لا تحتوي على متغيرات مطلقة ، فإننا نسميها « صيغة محصورة ». واما إن تضمنت على الاقل متغيراً واحداً مطلقاً ، فنسميها « صيغة مهملة » .

غالباً ، سوف نكتب Φس ، للتنويه بأن الصيغة Φ قد تحتوي على مواقع مطلقة من س ، دون أن يوجب ذلك وقوع س المطلق في Φ ، أو أيضاً أن يمنع وقوع متغيرات موضوع أخرى مطلقة فيها . وكذلك سوف نأخذ بالرمز « / » الذي سبق لنا استعماله في منطق القضايا ، فنكتب Φح ـ لنشير إلى الصيغة

التي تنجم عن Φس ، بإبدال سائر مواقع س المطلقة بـِ ح . استناداً إلى هذه المواضعات ، فإننا نقول عن متغير ع أنه مطلق لـِ س في Φس ، فقط إذا لم يقع س مطلقاً * ، ضمن نطاق سور يقيد ع . وبقول آخر : ع هو مطلق لـِ س ، فقط إذا كانت مواقع ع ، الناجمة عن الابدال ، في Φع/س ، هي أيضاً مطلقة . مثلا ، في الصيغة :

~ ⋀ع (ك (ع) ∧ ل (س ، ع)) ∨ ك (س)

« ع » ليس مطلقاً لـِ « س » ، لأنه حين ابدالنا « س » بـِ « ع » ، فالحاصل الذي هو :

~ ⋀ع (ك (ع) ∧ ل (ع ، ع)) ∨ ك (ع)

يختلف عن الأصل ، لوقوع المتغير الأول من « ل (ع ، ع) » تحت التقييد ، بعد أن كان مطلقاً . بينما إذا أبدلنا « س » بـِ « ف » ، فالصيغة الجديدة :

~ ⋀ع (ك (ع) ∧ ل (ف ، ع)) ∨ ك (ف)

لا تختلف عن الأولى إلا بالمتغيرات المستعملة ، وبالتالي « ف » هو مطلق لـِ « س ».

أخيراً ، نعرف « الشبه » بين الصيغ على الوجه الآتي :

---

* نلفت الانتباه الى الالتباس الحاصل في العبارة « لم يقع مطلقاً » وامثالها من العبارات. فهي غالباً ما تأتي بمعنى « لم يقع أبداً » أو البتة » . ولكنها أخذت في هذا الكتاب بمعنى « لم يقع على وجه مطلق » أي غير مقيد » .

إذا كان س و ع متغيرين مختلفين ، فاننا نسمي Φس شبيهة بـِ Φع ، فقط إذا كانت Φع هي Φع/س ، حيث ع هو مطاق لِـ س في Φس ، و Φس لا تحتوي على مواقع مطلقة من ع . وبقول أظهر ، تكون Φ شبيهة بـ Φع ، فقط إذا كانت المواقع المطلقة من ع ، في Φع هي تماماً نفس المواقع المطلقة من س في Φس . ينتج عن هذا التعريف أن علاقة الشبه تتمتع بالتناظر ، أعني إذا إذا كانت Φس شبيهة بـِ Φع فـَ Φع هي شبيهة بـِ Φس كذلك .

تمارين

I اين يقع كل واحد من المتغيرات ، مطلقاً أو مقيداً ، في الصيغ الآتية :

١. ⋀س (ك (ع ، س) ← ⋀ع ك (س ، ع))

٢. ⋁ف ⋀س (ك (ف ، س) ∨ ⋀ف ل (س ، ع ، ف))

٣. ⋀س (ك (س) ∧ ⋁س ل (س ، ف) ← ⋁ع م (س ، ع)) ∨ ل (ف ، س)

II هل « ع » هو مطاق لِـ « س » في :

١. ⋁ف ⋀ع ل (س ، ف) ← ك (س)

٢. ⋁ف (⋀ع ك (ع ، ف) ∨ ¬ ل (س ، ع) ← م (س ، ع ، ف)) .

III أية واحدة من الصيغ الأربع التالية ، هي شبيهة بالأولى :

١. ⋀ع (ل (س) ∧ ⋁س ك (ع ، س)) ← ك (ف ، س) ∨ ⋁ص ل (ص)

٢. ⋀ع (ل (ع) ∧ ⋁س ك (ع ، س)) ← ك (ف ، ع) ∨ ⋁ص ل (ص)

٣. ⋀ع (ل (ص) ∧ ⋁س ك (ع ، س)) ← ك (ف ، ص) ∨ ⋁ص ل (ص)

٤. ⋀ع (ل (ف) ∧ ⋁س ك (ع ، س)) ← ك (ف ، ف) ∨ ⋁ص ل (ص)

الدلالة في منطق المحمولات

في حساب الصياغة ، جرى فرز العبارات ، التي تنتمي إلى لغة منطـق المحمولات ، بطريقة صورية بحتة ، واقتصر قوام العبارات على كونها مجرد متتابعات من الرموز . تتحكم في بنيتها قواعد جعلية مستقلة عن المعاني . أما ايقاع الصلة بين هذه العبارات والمدلولات فهو من مهمة علم الدلالة ففي هذا العلم سوف نحدد تفسير الرموز ، الذي تعرفنا عليه بالأمثلة والشواهد في مستهل هذا القسم ، بالدقة التي تناسب اللغة الصورية ، ونبني على ذلك سائر المفاهيم الدلالية .

٢٧. المفهوم والماصدق

المدلولات ، التي تُسنَد إلى الالفاظ ، يمكن اعتبارها من حيثيتين مختلفتين : من حيث المفهوم ، ومن حيث الماصدق. فبالنسبة إلى القضايا ، نعتبر ما تفيده القضية من مضمون ، المدلول بحسب المفهوم ، والقيمة الصدقية التي تحتملها ، المدلول بحسب الماصدق . فبالمعنى الأخير ، تسمى قضيتان متساويتين إذا أخذتا نفس القيمة الصدقية . وبالتالي ، من حيث الماصدق ، تتساوى سائر القضايا الصادقة مع بعضها البعض ، وكذلك سائر القضايا الكاذبة . أما من حيث المفهوم ، فالتساوي يحصل بين قضيتين ، بالنسبة إلى نسق من التعريفات والقواعد عندما تكون كل واحدة من القضيتين قابلة للاستنباط عن الأخرى ، في النسق المذكور .

فيما يخص المحمولات ، تنقسم الدلالة على النحو الآتي : فمدلول المحمول الأحادي من حيث المفهوم ، يُقصد به الصفة ، أي مضمون المعنى الموضوع بإزاء المحمول . فمفهوم « الانسان » مثلا هو صفة الانسانية ، ومفهوم «الأحمر» الاحمرار ، الذي هو صفة لفئة من الأشياء . بينما ، من حيث الماصدق ، فمدلول المحمول يُراد به مجموعة الأفراد التي تندرج تحته ، أي الأفراد الذين تثبت لهم الصفة المقصودة من المحمول ؛ وهكذا ، فالماصدق العائد للانسان هو مجموعة أفراد البشر ، أي المجموعة المؤلفة من :

{ زيد ، سمير ، سقراط ، ... }

والماصدق العائد للأحمر ، هو مجموعة الأشياء الحمراء :

{ هذا الكتاب الأحمر ، هذه الثمرة الحمراء ، هذا الثوب الأحمر ،...}

قياساً على المحمولات الأحادية ، فإننا نعني بمفهوم المحمول الثنائي ، الصفة الاضافية أو العلاقة ، التي تعود إلى المحمول . فمثلا ، بمفهوم « الأب» ، نعني الأبوة ، وبمفهوم « الأكبر من » نعني التفوق في الكبر . بينما ، بماصدق المحمول الثنائي ، فإننـا نقصد المجموعة المؤلفة من الأزواج التي توجـد العلاقة بين كل زوجين منها . فالماصدق العائد لِـ « أب » هو المجموعة :

{ (آدم ، قايين) ، (فيليب ، الاسكندر)، (علي ، حسن) ، ... }

وماصدق « أكبر من » المجموعة :

{ (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٧ ، ٣) ، ... } .

وكذلك ، نتبع نفس القياس ، بالنسبة للمحمول الثلاثي فما فوق . فمثلا ، مفهوم « وقع بين » هو مضمون علاقة الوقوع ، والماصدق هو المجموعة المؤلفة من ثلاثيات مرتبة من الأفراد ، أي :

{ (دمشق ، بيروت ، بغداد) ، (ليبيا ، مصر ، تونس) ، (الحمراء ، الروشة ، البرج) ، ... }

وعلى العموم فإننا ، من حيث المفهوم ، نعني بمدلول محمول ذي ن حد (ن≥٢) العلاقـة القائمة بين ن فرد ، ومن حيث الماصدق ، المجموعة المؤلفة مـن ن ـ يات* مرتبة من الأفراد :

{ (س$_١$ ، ... ، س$_ن$) ، (ع$_١$ ، ... ، ع$_ن$)، (ف$_١$ ، ... ، ف$_ن$)، ... }.

أما النسب الحاصلة بين المحمولات ، من جهة المفهوم ، فهي أقوى من تلك التي تقوم بينها من جهة الماصدق . فقد يتساوى محمولان ، من حيث الدلالة

* اقرأ : نونيات

الماصدقية، دون أن تُوجَد مساواة بحسب المفهوم ، كما يشهد على ذلك المثل الأفلاطوني للمساواة بين مجموعة البشر ومجموعة الحيوانات التي دون ريش والتي تمشي على قدمين .

أخيراً ، نجري نفس التمييز في الدلالة بالنسبة للموضوعات . فعند المقارنة مثلا بين « مؤلف كتاب « أهل المدينة الفاضلة »» و « وزير سيف الدولة » ، نجد أنهما يدلان على فرد واحد هو الفارابي ، رغم اختلاف المفهوم . وأيضاً ، عندما نشير إلى شخص ما ، بقولنا « هذا الضاحك » و« هذا الكاتب » ، فالهذيتان متساويتان ، مع أن المفهومين متغايران . فمدلول الموضوع ، من حيث الماصدق ، نسميه « الفرد » ، ومن حيث المفهوم ، نخصه باسم « العين » .

اذن ، بالاجمال نحصل على الجدول الآتي :

اللفظة / المدلول	القضية	الموضوع	المحمول الأحادي	المحمول ذو ن حد: ن>١
المفهوم	الحكم	العين	الصفة	العلاقة
الماصدق	القيمة الصدقية	الفرد	المجموعة	مجموعة مؤلفة من ن ـ يات مرتبة

٢٨. التفسير

تحتوي عبارات منطق المحمولات على متغيرات مطلقة . ففي هذه اللغة ، متغيرات القضية ومتغيرات المحمول هي دوماً غير مقيدة . وكذلك ، في الصيغ المهملة ، تقع بعض متغيرات الموضوع مطلقة ، كما في «ك (س) . ∧ ل (س ، ع) » ، حيث في الصيغة الأول «س» هو مطلق ، وفي الثانية «ع». فهذه الصيغ ليست قضايا ، أي أقوالا ، يصح أن يقال عنها إنها صادقة أو كاذبة ، بل هي صور قضايا ، بمعنى انها تصير قضايا كلما فسرت المتغيرات باسناد مدلولات معينة لها . فمثلا بالنسبة إلى الصورة :

ك (س ، ع)

عند تفسيرنا متغير المحمول الثنائي « ك » بأب ، ومتغيرا الموضوع « س » و« ع » على التوالي بآدم وقايين ، نخرج بهذه القضية :

أب (آدم ، قايين) .

بينما ، في تبني التفسير الآتي : أب لـ « ك » ، وآدم لـ « س »، وحواء لـ « ع » . تتكون هذه القضية :

أب (آدم ، حواء) .

يمكن، دون شك ، اختيار مجالات أخرى للتفسير . ففي مجال الاعداد الطبيعية، قد نحصل مثلا على هذين التفسيرين لـ « ك » و« س » و« ع » :

أكبر (٧ ، ٢)

مساوي (٥ ، ٨) .

فتفسير المتغيرات المطلقة ، يحتاج إلى مجموعة من الأفراد ، تتعين بالنسبة لها مدلولات الموضوعات والمحمولات .

كذلك في حال ورود متغيرات مقيدة كما في :

$\bigwedge_{س}$ ك (س) ، $\bigvee_{ع}$ ¬ ل (س ، ع) ...

وحتى عند وجـود هذه المتغيرات المقيدة في صيغ لا تحتوي إلا على ثوابت المحمولات ، فمدلولات هذه الصيغ لا تتقرر إلا بتعيين المجموعة من الأفراد التي يحيط بها السور . أما تصور مجموعة كبرى ، يقع عليها تعميم السور الكلي وتبعيض السور الوجودي ، فجائز . ولكن مثل هذا الوضع ، من جهة ، يرغم ، في كل نظرية جزئية ، على أخذ سائر الاشياء بعين الاعتبار ، بدل حصر الكلام في الأشياء المقصودة من النظرية الجزئية . ومن جهة أخرى ، يُخشى الانطلاق من مجموعة كبرى ، تفادياً للإشكالات المتعلقة بنظريـة المجموعات .

إذن ، لإضفاء معاني على صيغ منطق المحمولات ، لا بد لنا من وضع مجموعة من الأفراد مج ، نفسّر بالنسبة إليهـا المتغيرات المطلقة ، ونحدد مجـال السور للمتغيرات المقيدة . أما عمل التفسير ، فيقوم بإسناد أفراد من المجموعة مج إلى متغيرات الموضوع ، وإسناد صفات أو علاقات على المجموعة مج ، إلى متغيرات المحمول . ونعني بالصفة أو العلاقة على المجموعة ، الصفة أو العلاقة التي يمكن البت بصدقها أو عدم صدقها على أفراد المجموعة . فهكذا مثلا ، مفهوم « القابل الانقسام على » هو صفة على مجموعة الاعداد الطبيعية {١، ٢، ٣، ...} ، لأنه يمكن البت بصدقه أو عدم صدقه على كل عدد من اعداد المجموعة ؛ بينما صفة الشجاعة ، من العبث البت بأمرها بالنسبة إلى مجموعة الأعداد الطبيعية ، وبالتالي فهي لا تصلح لأن تكون صفة على هذه المجموعة.

وكذلك ، فمفهوم « الأصغر من » يشكل علاقة على المجموعة المذكورة ، بينما علاقة القتل ليست من هذا الصنف . من جهة الماصدق ، يقابل الصفة أو العلاقة على مجموعة ما ج ، المجموعة المؤلفة من أفراد من ج أو من ن ـ يات مرتبة من ج . فماصدق « القابل الانقسام على ٤» ، على مجموعة الاعداد الطبيعية هو المجموعة :

{ ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ... }

وما صدق « الأصغر من » هو المجموعة :

{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، ... ، (٢ ، ٣) ، ... ، (٧ ، ١٢) ، ... }.

أما فيما يخص القضايا ، فيمكن اعتبارها ، على سبيل التعميم ، كحد أدنى للمحمولات ، أي محمولات ذات صفر حد . ومن وجهة النظر هذه ، يفهم بتفسير متغيرات القضايا على مجموعة ما ، اسناد مدلولات للقضايا من أي حكم كان ، دون نسبة إلى المجموعة . ومرجع هذا القول ، من حيث الماصدق ، إلى أن تفسير القضايا يقوم بإسناد قيمة صدقية لها من المجموعة { ص ، ك } ، كما جرينا على ذلك في منطق القضايا .

عند اقتصارنا على الدلالة الماصدقية ، التي سوف نأخذ بها في هذا الكتاب ، نضبط مفاد ما سبق على الوجه التالي :

يرتبط التفسير بمجموعة ما من الأشياء ، تسمى مجال التفسير . ويمكن اختيار أية مجموعة ج مجالاً للتفسير ، ما عدا المجموعة الفارغة . وعليه فتفسير لغة منطق المحمولات بالنسبة إلى مجموعة ما ج ، هو تابع فج ، يسند إلى متغيرات اللغة مدلولات مرتبطة بـ ج كما يأتي :

١. لكل متغير موضوع سـ ، يُسند فج فرداً واحداً فج (سـ) من المجموعة ج

٢. لكل محمول ك^{1} ، يُسند فج مجموعة فج (ك^{1}) على ج

٣. لكل متغير محمول ك^{ن} ، يسند فج مجموعة من ن ـ يات مرتبة فج (ك^{ن}) على ج

٤. لكل متغير قضية ب ، يسند فج قيمة صدقية من المجموعة { ص ، ك } .

الغاية من التفسير هي الوصول إلى تقييم الصيغ ، من حيث مطابقتها أو عدم مطابقتها لنفس الأمر . فاذا اخترنا ج مجموعة الناس مثلا ، وأعطينا المحمولات « ك » و« ل » التفسير الآتي :

فج(ك) ≨ متزوج
فج(ل) ≨ فيلسوف

وللمتغير « س » :

فج(س) ≨ أفلاطون

لنجم عن تفسير الصيغة :

ك (س) ٨ ⌐ ل (س)

قضية متحققة في الواقع ، وهي أن :

فيلسوف (أفلاطون) ٨ ⌐ متزوج (أفلاطون)

في هذه الحالة ، نريد أن نقول إن التفسير الموضوع يحقق الصيغة المذكورة بينما بالنسبة إلى الصيغتين الآتيتين :

⌐ ك (س)
⌐ ك (س) ٧ ل (س)

فالتفسير نفسه يعطينا هاتين القضيتين :

⌐ فيلسوف (أفلاطون)
⌐ فيلسوف (أفلاطون) ٧ متزوج (أفلاطون)

وهو بالتالي لا يحققهما .

في الصيغ المسورة . بما أن المتغيرات التي يحيط بها السور هي غير مطلقة . فتحقق هذه الصيغ لا يتعلق فقط بالمدلول الذي يسنده التفسير إلى المتغير المسوّر. فمثلا ، حتى يحقق التفسير $ف_{ج}$ الصيغة :

$$\bigwedge_{س} ك (س)$$

لا يكفي أن يكون :

فيلسوف (أفلاطون)

أعني أن يحقق التفسير الصيغة « ك (س) » الناجمة عن الأولى من إهمال السور . بل المطلوب أكثر من ذلك . وهو أن يصدق $ف_{ج}$ (ك) أي فيلسوف ، على كل فرد من أفراد مجموعة الناس . فلبلوغ هذا المطاب . نشترط أن كل تفسير فْ لا يختلف عن ف . إذا اختلف . إلا بمدلول « س » . يجب أن يحقق « ك (س) » . إذ بهذه الطريقة. تستنفد التفاسير فْ(س) سائر أفراد المجال، مع استنفاد كل اختيار لـ فْ . في وجه عام . عند اعتبار أية صيغة $\Phi_{س}$ بدل «ك (س)». فاننا نقول إن التفسير $ف_{ج}$ يحقق الصيغة $\bigwedge_{س} \Phi_{س}$ ، فقط إذا كان كل تفسير $فْ_{ج}$ ، على النحو الذي ضبطناه ، يحقق $\Phi_{س}$. والآن ، بما أن السور البعضي يمكن تحديد معناه بواسطة السور الكلي ، فاننا نتوصل إلى تعريف قولنا ان « التفسير ف يحقق الصيغة Φ على المجموعة ج ». بالاختصار «$ف_{ج}$ حو Φ»، باستقراء بنية الصيغة Φ على التدرج التالي :

١. $ف_{ج}$ حو ب فقط إذا صدقت ب

ونقصد بذلك أن :

$ف_{ج}$ حو ب فقط إذا $ف_{ج}$(ب) = ص

٢. فج حو $ك^{ن}_{ي}$ (ح١ ، ح٢ ، ... ، حن) فقط إذا صدقت فج ($ك^{ن}_{ي}$) على (فج (ح١) ، فج (ح٢) ، ... ، فج (حن)) أي فقط إذا (فج (ح١) ، فج (ح٢) ، ... ، فج (حن)) ∋ فج ($ك^{ن}_{ي}$)

٣. فج حو ~ Φ فقط إذا ليس فج حو Φ

٤. فج حو (Φ ∧ Ψ) فقط إذا فج حو Φ و فج حو Ψ

٥. فج حو (Φ ∨ Ψ) فقط إذا اما فج حو Φ أو فج حو Ψ

٦. فج حو (Φ → Ψ) فقط إذا إذا فج حو Φ فـَ فج حو Ψ

٧. فج حو $\bigwedge_{س}$ Φس فقط إذا لكل تفسير فَج ، لا يختلف عن فج ، إن اختلف ، إلا بمدلول س ، فَج حو Φس

٨. فج حو $\bigvee_{س}$ Φس فقط إذا فج حو ~ $\bigwedge_{س}$ ~ Φس

في هذه التعريفات ، يجب أن تؤخذ أدوات اللغة الطبيعية «ليس» و ، إما ... أو ، إذا ... فـَ» الواردة باللغة الماورائية ، بالمعنى الذي ضبطنا به روابط القضايا.

استناداً إلى تعريف التحقق بالنسبة إلى الصيغ الفردية ، نريد أن نوسع هذا التعريف بحيث يشمل أية مجموعة Δ من الصيغ ، متناهية كانت أم غير متناهية . لذلك نضيف أن التفسير ف يحقق مجموعة من الصيغ Δ على المجال ج ، فقط إذا حقق ف كل صيغة من Δ على المجال ج ، وبالايجاز :

فج حو Δ فقط إذا فج حو Φ لكل صيغة Φ من المجموعة Δ .

وأخيراً نصطلح على التعبير الآتي : فنقول عن صيغة Φ أو مجموعة من الصيغ Δ انها قابلة للتحقق على المجال ج ، فقط إذا وجد تفسير ف يحقق Φ أو Δ على المجال ج. بناء على ذلك ، نقول عن Φ أو Δ انها قابلة للتحقق ، على الاطلاق ، فقط إذا وجد مجال ج تكون فيه Φ أو Δ قابلة للتحقق .

٣٠. الصحة واللزوم

بوضع مفهوم التحقق ، استقام لنا أساس دلالي عام ، ينطبق على سائر الصيغ محصورة كانت أم مهملة . فعلى هذا الأساس ، يمكن الآن بناء المفاهيم الدلالية الأخرى . ولذلك نشرع في تحديد اللزوم ، باعتبار أن الصحة هي حالة خاصة منه ، فنقول انه عن مجموعة من الصيغ Δ تلزم الصيغة Φ على المجال ج ، عندما لكل تفسير ف على المجال ج ، إذا حقق ف المجموعة Δ فهو يحقق أيضاً الصيغة Φ . وبالرموز :

Δ ⊨ج Φ فقط إذا لكل تفسير ف على ج: إذا فج حو Δ فَ فج حو Φ.

كذلك نقول بوجه مطلق، انه عن Δ تلزم Φ ، دون تقييد اللزوم بمجال ما ، عندما على كل مجال ج غير فارغ ، عن Δ تلزم Φ . بالتالي يكون مرجع اللزوم على الاطلاق إلى أنه لكل مجال ج ولكل تفسير ف على ج ، إذا فج حو Δ فَ فج حو Φ . بالايجاز :

$\Delta \models \Phi$ فقط إذا لكل ج : Δ ⊨ج Φ .

في حال كون مجموعة الصيغ Δ متناهية، أعني مؤلفة من عدد متناه من الصيغ ، لنقل :

$\Delta = \{\Phi_1 ، \Phi_2 ، \ldots ، \Phi_ن\}$ ن $\geq$ ١

فاننا نعتمد الكتابة التي سبق لنا مزاولتها ، وهي :

$\Phi_1 ، \Phi_2 ، \ldots ، \Phi_ن$ ⊨ج Φ

$\Phi_1 ، \Phi_2 ، \ldots ، \Phi_ن \models \Phi$.

أما تعريف الصحة ، فيتخصص باللزوم عن مجموعة Δ فارغة. وعليه نسمي :

Φ صحيحة على ج فقط إذا $\models_{ج}$ Φ

Φ صحيحة فقط إذا $\models$ Φ .

استناداً إلى تعريف قابلية التحقق وتعريف اللزوم ، نستنتج مباشرة المسائل التالية :

مسألة١ : Δ $\models_{ج}$ Φ فقط إذا Δ ، Φ ليست قابلة للتحقق في المجال ج

برهان : Δ $\models_{ج}$ Φ فقط إذا لكل فـج : إذا فـج حـو Δ و فـج حـو Φ

فقط إذا لا يوجد فـج ، بحيث أن فـج حـو Δ وليس فـج حـو Φ

فقط إذا لا يوجد فـج ، بحيث أن فـج حـو Δ وفـج حـو ـ Φ

فقط إذا لا يوجد فـج ، بحيث أن فـج حـو Δ، ـ Φ

فقط إذا Δ، - Φ غير قابلة للتحقق على المجال ج

بالطريقة نفسها ، وبالاستعانة بالمسألة ١ ، نبرهن على حصول النسبة المذكورة بين اللزوم وقابلية التحقق دون التقييد بمجال ما ، أعني :

مسألة ٢ : Δ $\models$ Φ فقط إذا Δ ، ـ Φ ليست قابلة للتحقق

برهان : Δ $\models$ Φ فقط إذا لكل ج : Δ $\models_{ج}$ Φ

فقط إذا لكل ج : Δ ، ـ Φ ليست قابلة للتحقق على ج

فقط إذا لا يوجد ج ، بحيث أن Δ ، ـ Φ تكون قابلة للتحقق على ج

فقط إذا Δ ، - Φ ليست قابلة للتحقق .

فيما يخص علاقة الصحة بقابلية التحقق، مع التقييد بمجال أو دونه ، نحصل، عند اعتبار المقدمات Δ مجموعة فارغة ، على حالتين خاصتين من المسألتين ١ و ٢ ، هما :

مسألة ١ ׳ : Φ هي صحيحة على ج فقط إذا $\neg\Phi$ ليست قابلة للتحقق على ج

مسألة ٢ ׳ : Φ هي صحيحة فقط إذا $\neg\Phi$ ليست قابلة للتحقق

من هذه المسائل نستخلص أنه للبرهنة على عدم صحة صيغة ما ، يكفي أن نجد تفسيراً واحداً على مجال ما لا يحقق الصيغة المذكورة . فهكذا مثلا نستطيع البت في عدم صحة هذه الصيغة :

$$\bigwedge_{س} \bigvee_{ع} ك(س ، ع) \leftarrow \bigvee_{ع} \bigwedge_{س} ك(ع ، س)$$

باختيارنا تفسير الاب لـ « ك » على مجال مجموعة الناس ، إذ عندها نخلص بهذه القضية غير المتحققة :

لكلِ واحد من الناس يوجد أب ← ثمة أب لكل الناس أجمعين

متحققة   غير متحققة   غير متحققة

أما تقرير المسائل الصحيحة في منطق المحمولات ، فهو ، على العموم ، ليس بالسهولة التي عهدناها في منطق القضايا . ولذلك نكتفي هنا بأن نبين بصورة مبسطة ، بعض المسائل الاساسية التي نحتاجها لوضع النسق الأكسيومي ، مرجئين عرض وبرهان المسائل الأخرى إلى المستوى النحوي .

مسألة ٣ : $\models \Phi \leftarrow \bigwedge_{س} \Phi$ شرط أن لا يكون س مطلقاً في Φ

برهان : ليكن ف تفسيراً ما ، فانه يكفي اظهار انه كلما حقق التفسير

المفترض Φ فهو يحقق $\bigwedge_{س} \Phi$. وهذا واضح، لأنه عند تحقيق التفسير ف لِـ Φ ، بما ان س هو أصلا غير مطلق في Φ ، فان السور الكلي لـــن يقيده ، وبالتالي لن يغير في تفسير ف لِـ $\bigwedge_{س} \Phi$.

مسألة ٤ : $\models \bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Phi_{ح/س}$ شرط أن يكون ح مطلقاً لِـ س في $\Phi_{س}$

برهان : لنفترض ان ثمة تفسيراً ف يحقق $\bigwedge_{س} \Phi_{س}$، فهذا يعني ان كل تفسير فْ ، لا يختلف عن ف ، إن اختلف ، إلا بمدلول س ، يحقق $\Phi_{س}$. فبما أن $\Phi_{ح/س}$ المقيدة بالشرط المذكور ، لا تختلف عن $\Phi_{س}$ إلا بورود متغير آخر في المواقع نفسها التي يقع فيها س في $\Phi_{س}$ ، مع بقـــاء الاطلاق على ما هو ، فالتفسير ف يسند إلى $\Phi_{ح/س}$ المدلولات ذاتها التي يسندها إلى $\Phi_{س}$ ، باستثناء مدلول س . أي ان ف ($\Phi_{ح/س}$) هو احد التفاسير فْ ($\Phi_{س}$) ، وبالتالي فالتفسير ف يحقق $\Phi_{ح/س}$.

مسألة ٥ : $\models \bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ شرط أن لا يكون س مطلقاً في Φ

برهان : لنفترض فساد المسألة . بالتالي يوجد تفسير ف لا تتحقق المسألة به . وهذا يحصل إذا ما حقق التفسير المذكور $\bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س})$ ولم يحقق $\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س}$. والحال أن $\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س}$ لا يحققها التفسير ، إلا إذا حقق Φ ولم يحقق $\bigwedge_{س} \Psi_{س}$. مما يعني أنه يوجد تفسير فْ ، قد يختلف عن ف بمدلول س ، لا يحقق $\Psi_{س}$. فبما أن س لايقع مطلقاً لا في $\bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س})$

ولا في Φ ، اللتين يحققهماالتفسير ف ، فالتفسير فْ يحققهما كذلك .
وبما أن التفسير فْ يحقق $\bigwedge_{س}$ ($\Phi \rightarrow \Psi_{س}$) ، فهو بالأحرى يحقق $\Phi \rightarrow \Psi_{س}$ ، حسب تعريف التحقق بالنسبة إلى السور الكلي. فعن تحقيق التفسير فْ لـِ $\Phi \rightarrow \Psi_{س}$ ولـِ Φ ، ينتج أن التفسير المذكور يحقق $\Psi_{س}$.
ولكن هذا خلف لما سبق حصوله عن الافتراض وهو أن فْ لا يحقق $\Psi_{س}$. بالتالي فالمسألة ٥ صحيحة .

تمارين :

I برهن أن المسائل ٣ و ٤ و ٥ ، دون الشروط المقرونة بها ، هي غير صحيحة .

II إذا ما وضعنا بالنسبة إلى مجموعة الناس التفسيرين $ف_{1}$ و$ف_{2}$ على هذا الشكل :

$ف_{1}$ (ك) ≑ حفيد　　$ف_{2}$ (ك) ≑ قاتل

$ف_{1}$ (ل) ≑ أب　　$ف_{2}$ (ل) ≑ مجرم

$ف_{1}$ (ص) ≑ آدم　　$ف_{2}$ (ص) ≑ نيرون

فعند أي منهما تتحقق الصيغ الآتية :

١. $\bigvee_{س}$ ك (س ، ص) ∧ $\bigwedge_{ع}$ ¬ ك (ص ، ع)

٢. $\bigwedge_{س}$ (¬ ل (س) ← ¬ $\bigvee_{ع}$ ك (س ، ع))

٣. $\bigwedge_{س}\bigwedge_{ع}\bigwedge_{و}$ (ك (س ، ع) ∧ ك (ع ، ف) ← ك (س ، ف))

III ميز بين الصيغ الصحيحة والفاسدة :

١. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س}$

٢. $\bigwedge_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} \Phi\text{س، ع} \rightarrow \bigvee_{\text{ع}} \bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س، ع}$

٣. $\bigvee_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \Phi\text{س، ع} \rightarrow \bigwedge_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س، ع}$

٤. $\bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \Phi\text{س، ع} \leftrightarrow \bigwedge_{\text{ع}} \bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س، ع}$

٥. $\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} (\Phi\text{س} \wedge \Psi\text{س})$

٦. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigwedge_{\text{س}} \Psi\text{س} \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \wedge \Psi\text{س})$

حساب المحمولات

٣١. نسق اكسيومي لمنطق المحمولات

في منطق القضايا ، تقرير الصيغ الصحيحة توفره طريقة جداول الصدق على نحو أكيد وآلي ، يُغني عن إقامة نسق أكسيومي له . والغرض هناك من التوسع في المستوى النحوي لم يكن إلا المقارنة بينه وبين المستوى الدلالي ، وإبراز الخصائص المترتبة عنها ، حتى نتعرف ، بالتفصيل والتطبيق ، على المنهجية العامة التي يعتمدها المذهب الصوري . أما في منطق المحمولات ، فإظهار صحة الصيغ لم يعد ، كما كان من قبل ، مسألة آلية ، بل صار يتطلب النظر في كل المجالات غير الفارغة ، ومنها المجالات غير المتناهية . هذا بالاضافة إلى أن المفاهيم الدلالية التي يقوم عليها منطق المحمولات تنتمي إلى نظرية المجموعات ، وهي نظرية ، ما زالت الاشكالات المقرونة بها تبعث على الشك في صلاحها لأن تكون أساساً للمنطق . من هنا كان التطرق إلى منطق المحمولات من باب النحو ، أكثر فائدة وسلامة له .

من أجل اقامة النسق الأكسيومي ، سنأخذ بالأساس اللغوي ، الذي يقتصر من الروابط على « ← ، $\neg$ » كما جرينا سابقاً، ومن الأسوار ، على السور الكلي « $\bigwedge$ » فقط . أما السور البعضي ، فبسبب التلازم الحاصل بين $\neg \bigwedge \neg \Phi$ و $\bigvee \Phi$ ، فاننا ندخله على لغة النسق بواسطة التعريف ، كما سنفعل كذلك بالنسبة لبقية الروابط . ولكن هنا ، بدلا من المسلمات ، سننطلق من أشكال مسلمات . وهذه تضم ، إلى جانب الأشكال الثلاثة التي سبق لنا مزاولتها في منطق القضايا ، شكلين خاصين بالمحمولات ، وهي بمجملها :

سل$_1$: $(\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow \Phi$

سل٢ : $((X \leftarrow \Phi) \leftarrow (\Psi \leftarrow \Phi)) \leftarrow ((X \leftarrow \Psi) \leftarrow \Phi)$

سل٣ : $(\Phi \leftarrow \Psi) \leftarrow (\Psi \neg \leftarrow \Phi \neg)$

سل٤ : $\Phi_{\text{ح/س}} \leftarrow \Psi_{\text{س}} \bigwedge_{\text{س}}$ شرط أن يكون ح مطلقاً لـ س في $\Phi_{\text{س}}$

سل٥ : $(\Psi_{\text{س}} \bigwedge_{\text{س}} \leftarrow \Phi) \leftarrow (\Psi_{\text{س}} \leftarrow \Phi) \bigwedge_{\text{س}}$ شرط أن لا يقع س مطلقاً في Φ

أما القواعد ، فتشتمل على قاعدتي استدلال هما :

قاعدة الوضع (ضع) : $\Psi \Leftarrow \Psi \leftarrow \Phi \text{ ، } \Phi$

قاعدة التعميم (عم) : $\Phi_{\text{س}} \bigwedge_{\text{س}} \Leftarrow \Phi_{\text{س}}$

وعلى التعريفات ، التي بواسطتها يتم إدخال الأدوات التي لا يحتويها الأساس، منها :

عر١ : $\Phi_{\text{س}} \neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \leftrightharpoons \Phi_{\text{س}} \bigvee_{\text{س}}$

عر٢ : $\Psi \leftarrow \Phi \neg \leftrightharpoons \Psi \vee \Phi$

عر٣ : $(\Psi \neg \leftarrow \Phi) \neg \leftrightharpoons \Psi \wedge \Phi$

عر٤ : $(\Phi \leftarrow \Psi) \wedge (\Psi \leftarrow \Phi) \leftrightharpoons \Psi \leftrightarrow \Phi$.

في هذا النسق، يختلف شكلا المسلمات سل٤ وسل٥ عن بقية أشكال المسلمات باقترانهما بشروط . فمثلا ، حسب سل٤ ، ليست كل صيغة على هذا الشكل

مسلمة ، بل فقط تلك التي لا تحتوي فيها Φ على س مطلقاً . وكذلك الشكل سل$_{٥}$ فهو لا يستغرق من المسلمات ، الا الصيغ التي يتوفر فيها الشرط المقرون به . والغاية من وضع هذين الشرطين ، هي حفظ النسق من التناقض . لأن الاشكال سل$_{٤}$ وسل$_{٥}$. كما يتضح من التمرين I ، ٣٠ ، تفقد صحتها عند عـــدم تقييدها بالشرطين المذكورين . أما الاشكال سل$_{١}$ وسل$_{٢}$ وسل$_{٣}$ ، فتؤلف مع قاعدة الوضع ، نسق منطق القضايا ، وبالتالي فجميع المسائل التي يبرهن عليها في منطق القضايا ، هي أيضاً مسائل يبرهن عليها في منطق المحمولات . بل أكثر من ذلك ، فان الصيغ Φ و Ψ و X في اشكال المسلمات الثلاثة ، تعم هنا ، بالاضافة إلى المركبات من متغيرات القضايا « ب ، ج ، د ... » ، المركبات التي تدخل الأسوار والمحمولات والموضوعات عليها ، مثل :

$$\sim ك(س ، ع) \leftarrow (\bigvee_{ع} ل(ع) \leftarrow \sim ك(س ، ع))$$

بالنسبة للشكل سل$_{١}$. لذلك ، فالصيغ التي تنجم عن مسائل منطق القضايا ، بإبدال متغيرات القضايا بصيغ من صيغ المحمولات ، هي من مسائل منطق المحمولات . أعـــني إذا كانت Φ$_{ب١ ، ب٢ ، ... ، بن}$ مسألة مـــن منطق القضايا تحتوي على المتغيرات ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ... ، ب$_{ن}$ ، فالصيغة Φ$_{Ψ١/ب١ ، Ψ٢/ب٢ ، ... ، Ψن/بن}$ الناجمـــة عن الأولى بإبـــدال أي متغير قضية ب$_{ء}$ بالصيغة Ψ$_{ء}$ من منطق المحمولات ، هي مسألة في منطق المحمولات . لأنه خلال كل سطر من سطور البرهان على Φ$_{ب١ ، ... ، بن}$ إذا ابدلنا المتغيرات ب$_{١}$ ، ... ، ب$_{ن}$ بالصيغ Ψ$_{١}$ ، ... ، Ψ$_{ن}$ ، فاننا نتوصل إلى اقامة برهان على Φ$_{Ψ١/ب١ ، ... ، Ψن/بن}$ ، وذلك بالاعتماد على الاشكال الثلاثة مع قاعدة الوضع فقط .

بشأن تعريف البرهان والاستنباط في منطق المحمولات ، يجب أخذ قاعدة التعميم بعين الاعتبار . لذلك نحدد استنباط Ψ من الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$ ، بأنه المتتابعة من الصيغ :

$X_{١}$

$X_{٢}$

:

:

$X_{م}$

حيث كل واحدة من $X_{ء}$ (١ ≥ ء ≥ م) هي :

إما ١. مسلمة

وإما ٢. احدى الفرضيات

وإما ٣. ناجمة ، بتطبيق قاعدة الوضع ، عن صيغتين سابقتين $X_{ي}$ و $X_{ى}$ (ي ، ى > ء) ، حيث $X_{ى}$ تتركب من $X_{ي}$ ← $X_{ء}$

وإما ٤. ناجمة عن صيغة سابقة $X_{ي}$ (ى > ء) ، بتطبيق قاعدة التعميم على متغير ما ، شرط أن لا يرد هذا المتغير مطلقاً ، في احدى الفرضيات $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$.

الهدف من تقييد قاعدة التعميم بهذا الشرط ، هو اثبات مسألة الاستنباط في منطق المحمولات . إذ دون هذا الشرط يمكن الانتقال من :

ك (س) ⊣ $\bigwedge$ ك (س)

إلى :

⊣ ك (س) ← $\bigwedge$ ك (س) .

والحال أن هذه الصيغة ليست صحيحة ، لانه يوجد تفسير لا تتحقق به . فلو اخترنا ، على سبيل المثال ، مجموعة الناس مجالا للتفسير ، واسندنا إلى « ك » فيلسوف ، وإلى « س » المطلق أفلاطون ، لنجم عن هذا التفسير القضية غير المتحققة :

فيلسوف (افلاطون)	←	$\bigwedge_{\text{س}}$ فيلسوف (س)
متحققة	غير متحققة	غير متحققة

ولوقع النسق في التناقض .

بما أن انطلاقنا في منطق المحمولات من أشكال مسلمات ، فسوف نأتي على اشكال مسائل عن طريق اشكال براهين :

مسألة ١ : $\vdash \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

برهان :

١. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})$ سل٤

٢. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Phi_{\text{س}}$ سل٤

٣. $(\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})) \rightarrow$

$((\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Phi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})))$

منطق القضايا*

* بإبدال في الصيغة الصحيحة ((ب ← (جـ ← د)) ← ((هـ ← جـ) ← (ب ← (هـ ← د))) من منطق القضايا

٤. $(\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Phi_{\text{س}}) \rightarrow ((\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}))$

ضع ؛ ١، ٣

٥. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})$ ضع ؛ ٢، ٤

٦. $\bigwedge_{\text{س}} (\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}))$ عم ؛ ٥

٧. $\bigwedge_{\text{س}} (\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})) \rightarrow$

$(\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}))$ سل٤

٨. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})$ ضع ؛ ٦ ، ٧

٩. $\bigwedge_{\text{س}} (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$ سل٥

١٠. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$ منطق القضايا ؛ ٨ ، ٩

مسألة ٢ : $\vdash \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

برهان :

١. $(\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}})$ مق*

---

* « مق » هي اختصار لـ « منطق القضايا »

٢. $\bigwedge_{س} ((\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س}))$ عم ؛ ١

٣. $\bigwedge_{س} ((\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س})) \rightarrow$

$(\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow \bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س}))$ مسألة ١

٤. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow \bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س})$ ضع ؛ ٢،٣

٥. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ مسألة ١

٦. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ ضع ؛ ٤ ، ٥

٧. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\bigwedge_{س} \Psi_{س} \rightarrow \bigwedge_{س} \Phi_{س})$ يجري البرهان عليها بطريقة مماثلة لـ ١ – ٦

٨. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftrightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ مق ؛ ٦ ، ٧

مسألة ٣ : (مسألة الاستنباط)

إذا $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن-١}$ ، $\Phi_{ن} \vdash \Psi$ فَ $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن\,١} \vdash \Phi_{ن} \rightarrow \Psi$

برهان : للوصول إلى ذلك ، سوف نتبع طريقة الاستقراء نفسها الّتي جرينا عليها في منطق القضايا ، فنبرهن انه بناء على الاستنباط :

X_1

X_2

:

.

:

$X_م$

الموافق لِـ Φ ، ... ، $\Phi_{ن-1}$ ، $\Phi_ن \dashv \Psi$ ، يتّم لنا استنباط $\Phi_ن \to X_ء$ من Φ_1 ، ... ، $\Phi_{ن-1}$ ، بالنسة لكل ء ($1 \leqslant ء \leqslant م$) .

لنبدأ بِـ ء = ١ ؛ فالحالات الّتي تواجهنا هي :

إما ١. X_1 هي مسلمة

أو ٢. احدى الفرضيات Φ_1 ، ... ، $\Phi_{ن-1}$

أو ٣. $\Phi_ن$

في هذه الحالات نحصل على $\Phi_ن \to X_1$ ، على النحو الذي عالجناها به في منطق القضايا .

لنفترض الآن أنه تم اثبات Φ_1 ، ... ، $\Phi_{ن-1} \dashv \Phi_ن \to X_ي$ ، بالنسبة لكل ي أصغر من ء ، ولنبين أن $\Phi_ن \to X_ء$ تقبل كذلك الاستنباط من Φ_1 ، ... ، $\Phi_{ن-1}$. فالحالات الّتي تواجهنا سوى الثلاث المذكورة ، اثنتان هما :

٤. $X_ء$ تنجم ، بواسطة قاعدة الوضع ، عن صيغتين سابقتين $X_ي$ و$X_ک$ (ي ، ک < ء) حيث $X_ک$ لها هذا التركيب $X_ي \to X_ء$. عندها يجري تحصيل $\Phi_ن \to X_ء$ كما في السابق .

٥. $X_ء$ تنجم عن صيغه سابقة $X_{ي س}$ ، بتطبيق قاعدة التعميم. أي ان $X_ء$ هي $\bigwedge_{س} X_{ي س}$ ، حيث س هو متغير موضوع ، غير مطلق في Φ_1 ، ... ، $\Phi_ن$.
فللحصول على $\Phi_ن \rightarrow X_ء$ نضيف الأسطر الآتية :

١.	$\Phi_ن \rightarrow X_{ي س}$	افتراض الاستقراء
٢.	$\bigwedge_{س} (\Phi_ن \rightarrow X_{ي س})$	عم ؛ ١
٣.	$\bigwedge_{س} (\Phi_ن \rightarrow X_{ي س}) \rightarrow (\Phi_ن \rightarrow \bigwedge_{س} X_{ي س})$	سل٥
٤.	$\Phi_ن \rightarrow \bigwedge_{س} X_{ي س}$	ضع ؛ ٢ ، ٣

وهكذا يشمل الاستقراء كل اعداد المتتابعة بما فيها ء = م . فيحصل استنباط $\Phi_ن \rightarrow X_م$ ، وهو المطلوب .

إليك تطبيق على مسألة الاستنباط :

مسألة ٤ : $\dashv \bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi) \rightarrow (\bigvee_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Psi)$ شرط أن لا يقع س مطلقاً في Ψ.

برهان :

١.	$\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi)$	فرضية
٢.	$\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi_{س} \rightarrow \Psi)$	سل٤

٣. $\Psi \leftarrow \Phi_{س}$ ضع ؛ ١ ، ٢

٤. $\Phi_{س} \neg \leftarrow \Psi \neg$ مق ؛ ٣

٥. $(\Phi_{س} \neg \leftarrow \Psi \neg) \bigwedge_{س}$ عم ؛ ٤

٦. $(\Phi_{س} \neg \bigwedge_{س} \leftarrow \Psi \neg) \leftarrow (\Phi_{س} \neg \leftarrow \Psi \neg) \bigwedge_{س}$ سل

٧. $\Phi_{س} \neg \bigwedge_{س} \leftarrow \Psi \neg$ ضع ؛ ٥ ، ٦

٨. $\Psi \leftarrow \Phi_{س} \neg \bigwedge_{س} \neg$ مق ؛ ٧

٩. $\Psi \leftarrow \Phi_{س} \bigvee_{س}$ عر١ ؛ ٨

١٠ $(\Psi \leftarrow \Phi_{س} \bigvee) \leftarrow (\Psi \leftarrow \Phi_{س}) \bigwedge_{س}$ نبط ؛ ١ – ٩

لاحظ أن قاعدة التعميم لم تستعمل في السطر٥، إلا على متغير هو أصلا مقيد في الفرضية $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftarrow \Psi$.

كما اثبتنا في باب الدلالة من منطق القضايا ، بعض المسائل المتعلقة بالمناب والابدال ، نتطرق في هذا الفصل من نحو منطق المحمولات إلى بعض المسائل ، التي تنظر في تغيير الموضوعات أو الصيغ الجزئية ، الداخلة في تركيب صيغة ما .

مسألة ٥ : إذا كانت $\Phi_{س}$ شبيهة بـِ $\Phi_{ع}$ فـَ :

$$\vdash \bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \bigwedge_{ع} \Phi_{ع}$$

برهان :

١. $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Phi_{ع}$ سل٤

٢. $\bigwedge_{ع} (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Phi_{ع})$ عم ؛ ١

٣. $\bigwedge_{ع} (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Phi_{ع}) \rightarrow (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \bigwedge_{ع} \Phi_{ع})$ سل٥

٤. $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \bigwedge_{ع} \Phi_{ع}$ ضع ؛ ٢ ، ٣

ونتبع الطريقة نفسها للبرهان على $\bigwedge_{ع} \Phi_{ع} \rightarrow \bigwedge_{س} \Phi_{س}$. وبواسطة منطق القضايا نخلص إلى المطلوب .

مسألة ٦ : لتكن X_{φ} صيغة تحتوي على Φ ، ولتكن X^{Ψ}_{Φ} الصيغة الناجمة عن الأولى ، بإنابة Ψ مناب Φ ، ولتكن $س_1$ ، ... ، $س_ن$ المتغيرات المطلقة في Φ أو Ψ ، والمقيدة ،في X_{φ} ، فعندها :

$$\vdash \bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (X_{\varphi} \leftrightarrow X^{\Psi}_{\Phi})$$

برهان : يجري البرهان باستقراء عدد المرات ن التي ترد فيها الروابط والأسوار « $\neg$ ، $\rightarrow$ ، $\bigwedge$ » الداخلة في X_{φ}.

لنفترض ن = ٠ ، فالمناب يختص بالحالة الآتية :

حالة ١ : X_{φ} هي Φ .

لذلك يكفي البرهان على أن $\vdash \bigwedge_{\text{س}_1} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \Psi)$

١. $\bigwedge_{\text{س}_1} \bigwedge_{\text{س}_2} \bigwedge_{\text{س}_3} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow \bigwedge_{\text{س}_2} \bigwedge_{\text{س}_3} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi)$ سل٤

٢. $\bigwedge_{\text{س}_2} \bigwedge_{\text{س}_3} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow \bigwedge_{\text{س}_3} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi)$ سل٤

... ونكرر استعمال سل٤ حتّى نصل إلى :

ن. $\bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \Psi)$

أخيراً فتطبيق قانون التعدي للشرط ، يعطينا المطلوب .

لنفترض أن المسألة تستقيم بالنسبة للصيغ المحتوية على عدد من الأسوار والروابط أقل من ء ، ولنفترض ان X_{φ} تتضمن ء منها . فالحالات التي تواجهنا هي :

حالة ١ : X_{φ} هي $\neg \Omega_{\varphi}$

والبرهان عليها يجري بالاستعانة بالمسألة « (ب ↔ ج) ← (¬ ب ↔ ¬ ج) » من منطق القضايا ، انطلاقاً من فرضية الاستقراء $\bigwedge_{\text{س}_1} \dots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}}} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\Omega_{\varphi} \leftrightarrow \Omega^{\Psi}_{\varphi})$

حالة ٢ : X_φ هي $\Omega_\varphi \leftarrow I_\varphi$

وعندها يتوفر لنا حسب افتراض الاستقراء :

$$\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftarrow (\Omega_\varphi \leftrightarrow \Omega^{\Psi}_{\varphi})$$

$$\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftarrow (I_\varphi \leftrightarrow I^{\Psi}_{\varphi})$$

فباللجوء إلى ابدال موافق في المسألة « ((ب ↔ جـ) ∧ (د ↔ هـ)) ← ((ب ← د) ↔ (جـ ← هـ)) » نحصل على :

$$\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftarrow ((\Omega_\varphi \leftarrow I_\varphi) \leftrightarrow (\Omega^{\Psi}_{\varphi} \leftarrow I^{\Psi}_{\varphi}))$$

حالة ٣ : X_φ هي $\bigwedge_{س} \Omega_\varphi$.

بما أن المتغير س هو مقيد في الصيغة X_φ ، وجب اما أن يكون مقيداً في Φ أو Ψ ، وإما ان يكون من تعداد الـ $س_1$ ، ... ، $س_ن$. وفي كلتا الحالتين ، يكون س غير مطلق في $\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi)$. والحال أن الاستقراء يفترض أن :

$$\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftarrow (\Omega_\varphi \leftrightarrow \Omega^{\Psi}_{\varphi})$$

فبتطبيق قاعدة التعميم على س ، واستعمال سل$_\circ$ ، نحصل على :

$$\bigwedge_{س_1} \cdots \bigwedge_{س_ن} (\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftarrow \bigwedge_{س} (\Omega_\varphi \leftrightarrow \Omega^{\Psi}_{\varphi})$$

أخيراً ، فالمسألة ٢ توصلنا إلى :

$$({}^{\Psi}_{\varphi}\Omega \bigwedge_{\text{ص}} \leftrightarrow {}_{\varphi}\Omega \bigwedge_{\text{س}}) \leftarrow (\Psi \leftrightarrow \Phi) \bigwedge_{\text{سن}} \cdots \bigwedge_{\text{س١}}$$

تذنيب ٧ : إذا $\dashv \Phi \leftrightarrow \Psi$ فَ $\dashv X {}_{\varphi} \leftrightarrow X {}^{\Psi}_{\varphi}$

برهان : لنفترض $\dashv \Phi \leftrightarrow \Psi$ ، فالتعميم ن مرة يعطينا :

$$(\Psi \leftrightarrow \Phi) \bigwedge_{\text{سن}} \cdots \bigwedge_{\text{س١}}$$

ومن ثم، فتطبيق قاعدة الوضع على هذه الصيغة وعلى المسألة ٦ ، يؤدي بنا إلى المطلوب .

تذنيب ٨ (المناب) : إذا $\dashv \Phi \leftrightarrow \Psi$ و $\dashv X_{\varphi}$ فَ $\dashv X^{\Psi}_{\varphi}$

برهان : عن افتراض : $\dashv \Phi \leftrightarrow \Psi$

ينجم وفق التذنيب ٧ : $\dashv X_{\varphi} \leftrightarrow X^{\Psi}_{\varphi}$.

وباضافة الافتراض : $\dashv X_{\varphi}$

نحصل ، وفقاً لمنطق القضايا على : $\dashv X^{\Psi}_{\varphi}$

تذنيب ٩ (انابة المتغيرات المقيدة) : اذا كانت $\Phi_{\text{س}}$ شبيهة بِ $\Phi_{\text{ع}}$ فَ :

إذا $\dashv X \bigwedge_{\text{س}} \varphi_{\text{س}}$ فَ $\dashv X^{\bigwedge_{\text{ع}} \varphi_{\text{ع}}}_{\bigwedge_{\text{س}} \varphi_{\text{س}}}$

برهان : يتم بالاستعانة بالمسألة ٥ والتذنيب ٨ .

النسق الذي انطلقنا منه ، لبناء منطق المحمولات ، هو النسق الأكسيومي ، أي الذي يرتكز على المسلمات . وقد لا يكون هذا النسق هو الاصلح في جميع الأغراض ؛ فالطريقة المعروفة بحساب الاستنباط الطبيعي ، التي هي من وضع جنتسن Gentzen ، تقاسمه الافضلية في استخلاص المسائل ، وفي تطبيق المنطق على الرياضيات وعلى حقول أخرى . هذه الطريقة ، على ما مر بنا في منطق القضايا ، لا تأخذ نقطة انطلاقها من مسلمات ، بل من قواعد تتيح ادخال وحذف الروابط والاسوار ، بحيث يتأتى بناء الصيغة المراد البرهان عليها . فللاستفادة من هذه القواعد ، نريد أن نستحصل عليها من النسق الاكسيومي ، بواسطة الاشتقاق .

بخصوص ادخال السور الكلي ، لسنا بحاجة إلى ادخال قاعدة جديدة ، لان قاعدة التعميم تبيح لنا ذلك على نحو شامل . ولكن حتى يتسنى لنا الانتقال من استنباط نتيجة عن فرضيات ، إلى البرهان على الصيغة الشرطية الموافقة ، وجب أن نراعي بالنسبة لقاعدة التعميم التقيد الذي ورد ذكره في مسألة الاستنباط ، وهو أن نمتنع عن تطبيق هذه القاعدة على متغير في صيغة ما ، إذا ما وجد هذا المتغير مطلقاً في احدى الفرضيات، بقول آخر :

إذا $\Delta \vdash \Phi$س فـ $\Delta \vdash \bigwedge_{س} \Phi$س شرط أن لا تحتوي احدى فرضيات المجموعة Δ على س مطلقاً .

أما إدخال السور البعضي فيجري برهانه ، على الشكل الآتي :

مسألة ١٠ (ادخال $\bigvee$) : Φح/س $\vdash \bigvee_{س} \Phi$س شرط أن يكون ح مطلقاً لـ س في Φس

برهان :

١. $\Phi_{ح/س}$	فرضية
٢. $\bigwedge_{س} \neg \Phi_{س} \rightarrow \neg \Phi_{ح/س}$	سل٥
٣. $\neg\neg \Phi_{ح/س} \rightarrow \neg \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س}$	مق ؛ ٢
٤. $\neg\neg \Phi_{ح/س} \leftrightarrow \Phi_{ح/س}$	مق
٥. $\Phi_{ح/س} \rightarrow \neg \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س}$	مناب ؛ ٤ ، ٣
٦. $\Phi_{س/س} \rightarrow \bigvee_{س} \Phi_{س}$	عر١ ؛ ٥
٧. $\bigvee_{س} \Phi_{س}$	ضع ؛ ١ ، ٦

يقابل قاعدتي الادخال قاعدتا حذف ، هما بالنسبة إلى السور الكلي والسور البعضي على التوالي :

مسألة١١ (حذف $\bigwedge$): $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \vdash \Phi_{ح/س}$ شرط أن يكون ح مطلقاً لـ س في $\Phi_{س}$

برهان : ينجم مباشرة عن تطبيق قاعدة الوضع على :

الفرضية $\bigwedge_{س} \Phi_{س}$

والمسلمة $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftarrow \Phi_{ح/س}$

مسألة ١٢ (حذف $\bigvee$) : إذا Δ ، $\Phi_{س} \dashv \Psi$ ف Δ ، $\bigvee_{س} \Phi_{س} \dashv \Psi$
شرط أن لا يرد س مطلقاً لا في Δ ولا في Ψ

برهان :

١. Δ ، $\Phi_{س} \dashv \Psi$	مقدم المسألة
٢. $\Delta \dashv \Phi_{س} \leftarrow \Psi$	نبط ؛ ١
٣. $\Delta \dashv \bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftarrow \Psi)$	عم ؛ ٢ . لأن س ليس مطلقاً في Δ
٤. $\Delta \dashv \bigwedge_{س} (\Phi_{س} \leftarrow \Psi) \leftarrow (\bigvee_{س} \Phi_{س} \leftarrow \Psi)$	مسألة ٤
٥. $\Delta \dashv \bigvee_{س} \Phi_{س} \leftarrow \Psi$	ضع ؛ ٣ ، ٤
٦. $\bigvee_{س} \Phi_{س}$	فرضية تالي المسألة
٧. Δ ، $\bigvee_{س} \Phi_{س} \dashv \Psi$	ضع ؛ ٥ ، ٦

القاعدة الأخيرة تثبت انه إذا ورد خلال الاستنباط ، مع الفرضيات Δ ، فرضية $\bigvee_{س} \Phi_{س}$ تبدأ بالسور البعضي ، فمن الجائز حذف السور $\bigvee_{س}$ ، ومتابعة الاستنباط اعتماداً على Δ و$\Phi_{س}$ فقط ، فما ينتج عن Δ و$\Phi_{س}$ ، كما ينص على ذلك مقدم المسألة ، يكون أيضاً نتيجة عن Δ و $\bigvee \Phi_{س}$ ، حسبما يؤكد التالي . إليك بعض الشواهد التي توضح طريقة استعمال هذه القاعدة ·

مسألة ١٣ : $\vdash \bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س})$

برهان : البرهان على هذه المسالة يرجع إلى الاستنباط :

$$\bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س}) ، \bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \vdash \bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س}$$

وهنا Δ تقتصر على $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س})$، و $\bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س}$ هي الفرضية المسورة بالسور البعضي

١.	$\bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س})$	فرضية
٢.	$\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س}$	فرضية
٣.	$\Phi\text{س}$	مقدم حذف $\bigvee_{\text{س}}$ ؛ ٢
٤.	$\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ١
٥.	$\Psi\text{س}$	ضع ؛ ٣ ، ٤
٦.	$\bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٥
٧.	$\bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س}$	تالي حذف $\bigvee_{\text{س}}$ ، ٣-٦
٨.	$\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س}$	نبط ؛ ٢ — ٧
٩.	$\bigwedge_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi\text{س})$	نبط ؛ ١ — ٨

في السطر ٣ جرى حذف $\bigvee_{س}$ ، فتم لنا بناء على Δ والفرضية الجديدة $\Phi_{س}$. الحصول على $\bigvee_{س}\Psi_{س}$ في السطر ٦ . ولأن س لا يقع مطلقاً لا في $\bigwedge_{س}(\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س})$ ولا في $\bigvee_{س}\Phi_{س}$ ، تخلصنا في السطر ٧ من الفرضية $\Phi_{س}$ ، وألحقنا $\bigvee_{س}\Psi_{س}$ بالفرضيتين $\bigwedge_{س}(\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س})$ و $\bigvee_{س}\Phi_{س}$ فقط . أما إزاحة $\Phi_{س}$ إلى اليسار في في السطر ٣ فيعود إلى اعتبارها فرضية من فرضيات المقدم .

المثل الثاني يظهر كيفية تطبيق القاعدة أكثر من مرة على نفس الصيغة .

مسألة ١٤ : $\vdash \bigvee_{س}\bigvee_{ع}\Phi_{س،ع} \rightarrow \bigvee_{ع}\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$

برهان :

١.	$\bigvee_{س}\bigvee_{ع}\Phi_{س،ع}$	فرضية
٢.	$\bigvee_{ع}\Phi_{س،ع}$	مقدم حذف $\bigvee_{س}$ ؛ ١
٣.	$\Phi_{س،ع}$	مقدم حذف $\bigvee_{ع}$ ؛ ٢
٤.	$\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٣
٥.	$\bigvee_{ع}\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٤
٦.	$\bigvee_{ع}\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$	تالي حذف $\bigvee_{س}$ ؛ ٣-٥
٧.	$\bigvee_{ع}\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$	تالي حذف $\bigvee_{ع}$ ؛ ٢-٦
٨.	$\bigvee_{س}\bigvee_{ع}\Phi_{س،ع} \rightarrow \bigvee_{ع}\bigvee_{س}\Phi_{س،ع}$	نبط ؛ ١ — ٧

٣٢. قائمة بأهم المسائل

نجمع فيما يلي ، أهم المسائل التي يُحتاج إليها في منطق المحمولات ، مرتبة حسب علاقة الأسوار ببعضها البعض وبالروابط . ونورد البراهين على المسائل، التي تقدم صعوبة جديدة ، والتي لم يسبق البرهان عليها . أما المسائل الباقية ، فنتركها تمريناً للقارىء . وفي كل هذا الفصل ، نشترط بالصيغ Φ و Ψ ، غير المقرونة بالمتغير المسور الوارد في الصيغة المشتملة على Φ أو Ψ ، أن لا يقع هذا المتغير مطلقاً فيها . فهكذا مثلا ، تشير كتابتنا للمسألتين $\bigwedge_{س} \Phi \leftrightarrow \Phi$ و $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \to \Psi) \leftrightarrow (\bigvee_{س} \Phi_{س} \to \Psi)$ ، أن س في الأولى لا يقع مطلقاً في Φ ، وفي الثانية لا يقع مطلقاً في Ψ .

الأسوار والسلب

مسألة ١ : $\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \neg \bigvee_{س} \neg \Phi_{س}$

برهان :

١.	$\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \neg\neg \bigwedge_{س} \Phi_{س}$	مق
٢.	$\Phi_{س} \leftrightarrow \neg\neg \Phi_{س}$	مق
٣.	$\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \neg\neg \bigwedge_{س} \neg\neg \Phi_{س}$	مناب ؛ ١،٢
٤.	$\bigwedge_{س} \Phi_{س} \leftrightarrow \neg \bigvee_{س} \neg \Phi_{س}$	عر١ ؛ ٣

مسألة ٢ : $\bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \neg \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$

برهان :

١	$\bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \neg \neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}}$	مق
.٢	$\bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \neg \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$	عر١ ؛ ١

مسألة ٣ : $\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}}$

مسألة ٤ : $\bigvee_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \neg \bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$

تغيير الأسوار

مسألة ٥ : $\bigwedge_{\text{س}} \Phi \leftrightarrow \Phi$

برهان :

.١	Φ	فرضية
.٢	$\bigwedge_{\text{س}} \Phi$	عم ؛ ١
.٣	$\Phi \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi$	نبط ؛ ١ ، ٢
.٤	$\bigwedge_{\text{س}} \Phi \rightarrow \Phi$	سل٥

٥	$\bigwedge_{س} \Phi \leftrightarrow \Phi$	مق ؛ ٣ ، ٤

مسألة ٦ : $\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع} \leftrightarrow \bigwedge_{ع} \bigwedge_{س} \Phi_{س،ع}$

برهان :

١.	$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع}$	فرضية
٢.	$\bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ١
٣.	$\Phi_{س،ع}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ٢
٤.	$\bigwedge_{س} \Phi_{س،ع}$	عم ؛ ٣
٥.	$\bigwedge_{ع} \bigwedge_{س} \Phi_{س،ع}$	عم ؛ ٤
٦.	$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع} \rightarrow \bigwedge_{ع} \bigwedge_{س} \Phi_{س،ع}$	نبط ؛ ١–٥
٧.	$\bigwedge_{ع} \bigwedge_{س} \Phi_{س،ع} \rightarrow \bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع}$	نتبع نفس الطريقة التي حصلنا بها على ٦
٨.	$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع} \leftrightarrow \bigwedge_{ع} \bigwedge_{س} \Phi_{س،ع}$	مق ؛ ٦، ٧

مسألة ٧ : $\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع} \rightarrow \bigwedge_{س} \Phi_{س،س/ع}$ شرط ان يكون س مطلقاً لـِ ع في $\Phi_{س،ع}$

برهان :

١.	$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع}$	فرضية
٢.	$\bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ١
٣.	$\Phi_{س،س/ع}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ٢
٤.	$\bigwedge_{س} \Phi_{س،س/ع}$	عم ؛ ٣
٥.	$\bigwedge_{س} \bigwedge_{ع} \Phi_{س،ع} \rightarrow \bigwedge_{س} \Phi_{س،س/ع}$	نبط ؛ ١ — ٥

مسألة ٨ : $\bigvee_{س} \Phi \leftrightarrow \Phi$

برهان :

١.	$\bigwedge_{س} \neg \Phi \leftrightarrow \neg \Phi$	مسألة ٥
٢.	$\neg \bigwedge_{س} \neg \Phi \leftrightarrow \neg \neg \Phi$	مق ؛ ١
٣.	$\bigvee_{س} \Phi \leftrightarrow \neg \neg \Phi$	عر$_{١}$ ؛ ٢

٤. $\sim\sim\Phi \leftrightarrow \Phi$ — متق

٥. $\bigvee_{\text{س}} \Phi \leftrightarrow \Phi$ — مناب ؛ ٤ ، ٣

مسألة ٩ : $\bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}} \leftrightarrow \bigvee_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$

قد سبق البرهان على قسم منها في المسألة ١٤، ٣١ . أما البرهان على القسم الباقي فيجري كالأول :

مسألة ١٠ : $\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، س/ع}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}}$ شرط أن يكون س مطلقاً لـ ع في $\Phi_{\text{س، ع}}$

مسألة ١١ : $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$

برهان :

١. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$ — فرضية

٢. $\Phi_{\text{س}}$ — حذف $\bigwedge$ ؛ ١

٣. $\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$ — ادخال $\bigvee$ ؛ ٢

٤. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}}$ — نبط ؛ ١–٣

مسألة ١٢ : $\bigvee_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}} \rightarrow \bigwedge_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$

برهان :

١.	$\bigvee_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}}$	فرضية
٢.	$\bigwedge_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}}$	مقدم حذف $\bigvee_{\text{س}}$ ؛ ١
٣.	$\Phi_{\text{س، ع}}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ٢
٤.	$\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٣
٥.	$\bigwedge_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$	عم ؛ ٤
٦.	$\bigwedge_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$	تالي حذف $\bigvee_{\text{س}}$ ؛ ٢-٥
٧.	$\bigvee_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \Phi_{\text{س، ع}} \rightarrow \bigwedge_{\text{ع}} \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س، ع}}$	نبط ؛ ١-٦

السور الكلي ورابط التشارط

مسألة ١٣ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

راجع المسألة ٣١،٢.

مسألة ١٤ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

برهان :

.١	$\bigwedge_{\text{س}}(\Phi \leftrightarrow \Psi\text{ـ}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}}\Phi \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}}\Psi\text{ـ})$	مسألة ١٣
.٢	$\bigwedge_{\text{س}}\Phi \leftrightarrow \Phi$	مسألة ٥
.٣	$\bigwedge_{\text{س}}(\Phi \leftrightarrow \Psi\text{ـ}) \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}}\Psi\text{ـ})$	مناب ؛ ١،٢

مسألة ١٥ : $\bigwedge_{\text{س}}(\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\bigwedge\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \Psi)$

مسألة ١٦ : $\bigwedge_{\text{س}}(\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \Psi\text{ـ}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}}\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}}\Psi\text{ـ})$

برهان :

.١	$\bigwedge_{\text{س}}(\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \Psi\text{ـ})$	فرضية
.٢	$\bigvee_{\text{س}}\Phi\text{ـ}$	فرضية
.٣	$\Phi\text{ـ} \leftrightarrow \Psi\text{ـ}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ١
.٤	$\Phi\text{ـ}$	مقدم حذف $\bigvee_{\text{س}}$ ؛ ٢
.٥	$\Psi\text{ـ}$	مق ؛ ٣ ، ٤
.٦	$\bigvee_{\text{س}}\Psi\text{ـ}$	ادخال $\bigvee_{\text{س}}$ ؛ ٥

٧. $\bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$ — ثاني حذف $\bigvee$: ٤-٦

٨. $\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$ — نبط : ٢ – ٧

٩. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$ — نبط : ١ – ٨

١٠. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}})$ — البرهان عليها شبيه بـ ١–٩

١١. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$ — مق* : ٩، ١٠

مسألة ١٧ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi \leftrightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\Phi \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

الأسوار ورابط الشرط

مسألة ١٨ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \rightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

راجع المسألة ١، ٣١ .

مسألة ١٩ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi \rightarrow \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow (\Phi \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}})$

برهان :

١. $\Phi \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$ — فرضية

* نستعين بالمسألة : (ب ← د) ← ((ب ← ج) ← (ب ← ج ∧ د))

٢. $\bigwedge_{س} \Psi_{س} \rightarrow \Psi_{س}$ سل$_{٤}$

٣. $\Phi \rightarrow \Psi_{س}$ مق ؛ ١، ٢

٤. $\bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س})$ عم ؛ ٣

٥. $(\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س}) \rightarrow \bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س})$ نبط ؛ ١–٤

٦. $\bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ سل$_{٥}$

٧. $\bigwedge_{س} (\Phi \rightarrow \Psi_{س}) \leftrightarrow (\Phi \rightarrow \bigwedge_{س} \Psi_{س})$ مق ؛ ٥ ، ٦

مسألة ٢٠ : $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi_{س}) \rightarrow (\bigvee_{س} \Phi_{س} \rightarrow \bigvee_{س} \Psi_{س})$

راجع المسألة ١٣، ٣١.

مسألة ٢١ : $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\bigwedge_{س} \Phi_{س} \rightarrow \Psi)$

برهان :

١. $\bigwedge_{س} (\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi_{س}) \leftrightarrow (\neg \Psi \rightarrow \bigvee_{س} \neg \Phi_{س})$ مسألة ١٩

٢. $(\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi_{س}) \leftrightarrow (\Phi_{س} \rightarrow \Psi)$ مق

٣. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\neg \Psi \rightarrow \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س})$ مناب ؛ ٢ ، ١

٤. $(\neg \Psi \to \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س}) \leftrightarrow (\neg \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س} \to \Psi)$ مق

٥. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \to \Psi) \leftrightarrow (\neg \bigwedge_{س} \neg \Phi_{س} \to \Psi)$ مناب ؛ ٣،٤

٦. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \to \Psi) \leftrightarrow (\bigvee_{س} \Phi_{س} \to \Psi)$ عر$_{١}$ ؛ ٥

مسألة ٢٢ : $(\bigwedge_{س} \Phi_{س} \to \bigwedge_{س} \Psi_{س}) \to \bigvee_{س} (\Phi_{س} \to \Psi_{س})$

برهان :

١. $\neg \bigvee_{س} (\Phi_{س} \to \Psi_{س})$ فرضية

٢. $\neg \bigvee_{س} (\Phi_{س} \to \Psi_{س}) \leftrightarrow \bigwedge_{س} \neg (\Phi_{س} \to \Psi_{س})$ مسألة ٢

٣. $\bigwedge_{س} \neg (\Phi_{س} \to \Psi_{س})$ مناب ؛ ٢،٣

٤. $\neg (\Phi_{س} \to \Psi_{س}) \leftrightarrow \Phi_{س} \wedge \neg \Psi_{س}$ مق

٥. $\bigwedge_{س} (\Phi_{س} \wedge \neg \Psi_{س})$ مناب ؛ ٣،٤

٦. $\Phi_{س} \wedge \neg \Psi_{س}$ حذف $\bigwedge$ ؛ ٥

٧. $\Phi_{س} \wedge \neg \Psi_{س} \to \Phi_{س}$ مق

٨. $\Phi_{س}$ ضع ؛ ٦،٧

٩. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س}$ — عم ؛ ٨

١٠. $\Phi\text{س} \wedge \neg\Psi\text{س} \rightarrow \neg\Psi\text{س}$ — مق

١١. $\neg\Psi\text{س}$ — ضع ؛ ٦ ، ١٠

١٢. $\bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س}$ — ادخال $\bigvee$ ؛ ١١

١٣. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow (\bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س})$ — مق

١٤. $\bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س}$ — ضع ؛ ٩،١٣

١٥. $\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س}$ — ضع ؛ ١٢، ١٤

١٦. $\neg(\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \neg\bigvee_{\text{س}} \neg\Psi\text{س})$ — مناب ؛ مق، ١٥

١٧. $\neg(\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi\text{س})$ — مناب، مسألة ١ ، ١٦

١٨. $\neg\bigvee_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س}) \rightarrow \neg(\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi\text{س})$ — نبط ؛ ١–١٧

١٩. $(\bigwedge_{\text{س}} \Phi\text{س} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Psi\text{س}) \rightarrow \bigvee_{\text{س}} (\Phi\text{س} \rightarrow \Psi\text{س})$ — مق ؛ ١٨

مسألة ٢٣ : $\underset{س}{\bigvee} (Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س}) \leftrightarrow (\underset{س}{\bigwedge} Φ_{س} \rightarrow \underset{س}{\bigvee} Ψ_{س})$

برهان :

١.	$\underset{س}{\bigvee} (Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س})$	فرضية
٢.	$\underset{س}{\bigwedge} Φ_{س}$	فرضية
٣.	$Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س}$	مقدم حذف $\underset{س}{\bigvee}$ ؛ ١
٤.	$Φ_{س}$	حذف $\bigwedge$ ؛ ٢
٥.	$Ψ_{س}$	ضع ؛ ٤، ٣
٦.	$\underset{س}{\bigvee} Ψ_{س}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٥
٧.	$\underset{س}{\bigvee} Ψ_{س}$	تالي حذف $\underset{س}{\bigvee}$ ؛ ٣-٦
٨.	$\underset{س}{\bigwedge} Φ_{س} \rightarrow \underset{س}{\bigvee} Ψ_{س}$	نبط ؛ ١ – ٧
٩.	$\underset{س}{\bigvee} (Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س}) \rightarrow (\underset{س}{\bigwedge} Φ_{س} \rightarrow \underset{س}{\bigvee} Ψ_{س})$	نبط ؛ ١ – ٨
١٠.	$\vdash \underset{س}{\bigvee} (Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س})$	فرضية
١١.	$\underset{س}{\bigwedge} \vdash (Φ_{س} \rightarrow Ψ_{س})$	مناب ؛ مسألة ١٠،٢

١٢. ⋀س (Φس ۸ ⌐ Ψس) — مناب؛ مق، ١١

١٣. Φس ۸ ⌐ Ψس — حذف ⋀؛ ١٢

١٤. Φس — مق؛ ١٣

١٥. ⋀س Φس — عم؛ ١٤

١٦. ⌐ Ψس — مق؛ ١٣

١٧. ⋀س ⌐ Ψس — عم؛ ١٦

١٨. ⋀س Φس ۸ ⋀س ⌐ Ψس — مق؛ ١٥، ١٧

١٩. ⌐ (⋀س Φس ← ⌐ ⋀س ⌐ Ψس) — مناب؛ مق، ١٨

٢٠. ⌐ (⋀س Φس ← ⋁س Ψس) — عر١؛ ١٩

٢١. ⌐ ⋁س (Φس ← Ψس) ← ⌐ (⋀س Φس ← ⋁س Ψس) — نبط؛ ٩ – ٢٠

٢٢. (⋀س Φس ← ⋁س Ψس) ← ⋁س (Φس ← Ψس) — مق؛ ٢١

٢٣. ⋁س (Φس ← Ψس) ↔ (⋀س Φس ← ⋁س Ψس) — مق؛ ٩، ٢٢

مسألة ٢٤ : $(\Psi \leftarrow {}_{س}\Phi \bigwedge_{س}) \leftrightarrow (\Psi \leftarrow {}_{س}\Phi)\bigvee_{س}$

برهان : مناب ؛ مسألة ٨ ، مسألة ٢٣

مسألة ٢٥ : $({}_{س}\Psi \bigvee_{س} \leftarrow \Phi) \leftrightarrow ({}_{س}\Psi \leftarrow \Phi) \bigvee_{س}$

مسألة ٢٦ : $({}_{س}\Psi \leftarrow {}_{س}\Phi) \bigwedge_{س} \leftarrow ({}_{س}\Psi \bigwedge_{س} \leftarrow {}_{س}\Phi \bigvee_{س})$

برهان :

١.	$({}_{س}\Psi \neg \wedge {}_{س}\Phi) \bigvee_{س}$	فرضية
٢.	${}_{س}\Psi \neg \wedge {}_{س}\Phi$	مقدم حذف $\bigvee_{س}$ ؛ ١
٣.	${}_{س}\Phi$	ىق ؛ ٢
٤.	${}_{س}\Phi \bigvee_{س}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٣
٥.	${}_{س}\Psi \neg$	مق ؛ ٢
٦.	${}_{س}\Psi \neg \bigvee_{س}$	ادخال $\bigvee$ ؛ ٥
٧.	${}_{س}\Psi \neg \bigvee_{س} \wedge {}_{س}\Phi \bigvee_{س}$	مق ؛ ٤ ، ٦
٨.	${}_{س}\Psi \neg \bigvee_{س} \wedge {}_{س}\Phi \bigvee_{س}$	تالي حذف $\bigvee_{س}$ ؛ ٢-٧

٩. $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \neg \Psi_{\text{س}}) \to \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigvee_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}}$ نبط ؛ ١ – ٨

١٠. $\neg (\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigvee_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}}) \to \neg \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \neg \Psi_{\text{س}})$
مق ؛ ٩

١١. $(\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \to \neg \bigvee_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}}) \to \bigwedge_{\text{س}} \neg (\Phi_{\text{س}} \wedge \neg \Psi)$
مق ومناب ؛ ١٠

١٢. $(\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \to \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}) \to \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \to \Psi)$ مق ومناب ؛ ١١

مسألة ٢٧ : $(\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \to \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}) \to \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \to \Psi_{\text{س}})$

برهان :

١. $(\bigwedge_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}} \to \bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}}) \to \bigvee_{\text{س}} (\neg \Psi_{\text{س}} \to \neg \Phi_{\text{س}})$
مسألة ٢٢

٢. $(\neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \Phi_{\text{س}} \to \neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}}) \to \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \to \Psi_{\text{س}})$
مق ومناب ؛ ١

٣. $(\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \to \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}) \to \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \to \Psi_{\text{س}})$ عر$_{1}$ ؛ ٢

مسألة ٢٨ :

$\bigwedge_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} (\Phi_{\text{س،ع}} \to \Psi_{\text{س،ع}}) \to (\bigvee_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} {}_{\text{س،ع}} \to \bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} \Psi_{\text{س،ع}})$

الأسوار ورابط الوصل

مسألة ٢٩ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

برهان :

١. $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \neg \Psi_{\text{س}})$ مسألة ٢٣

٢. $\neg \bigwedge_{\text{س}} \neg (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \bigwedge_{\text{س}} \neg \neg \Psi_{\text{س}})$

مناب ؛ مسألة ٣، ١

٣. $\neg \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \neg (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigwedge_{\text{س}} \neg \neg \Psi_{\text{س}})$

مناب ؛ مق ، ٢

٤. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$ مناب ؛ مق ، ٣

مسألة ٣٠ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi) \leftrightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \Psi$

مسألة ٣١ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi \wedge \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \Phi \wedge \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

مسألة ٣٢ : $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi_{\text{س}})$

مسألة ٣٣ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi_{\text{س}}) \rightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

مسألة ٣٤ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi) \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \Psi$

برهان :

١. $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi) \leftrightarrow (\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi)$ مسألة ٢١

٢. $\neg \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi) \leftrightarrow \neg (\bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \rightarrow \neg \Psi)$ مق ؛ ١

٣. $\neg \bigwedge_{\text{س}} \neg (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi) \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \Psi$ مناب ؛ مق ، ٢

٤. $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \wedge \Psi) \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \wedge \Psi$ مناب ؛ مسألة ٣، ٣

مسألة ٣٥ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi \wedge \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \Phi \wedge \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

الأسوار ورابط الفصل

مسألة ٣٦ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi_{\text{س}}) \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

يجري البرهان انطلاقاً من المسألة ١٨

مسألة ٣٧ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi) \leftrightarrow (\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \Psi)$

مسألة ٣٨ : $\bigwedge_{\text{س}} (\Phi \vee \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \Phi \vee \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

مسألة ٣٩ : $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \bigwedge_{\text{س}} \Psi_{\text{س}} \rightarrow \bigwedge_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi_{\text{س}})$

مسألة ٤٠ : $\bigwedge_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}} \rightarrow \bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi_{\text{س}})$

مسألة ٤١ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

مسألة ٤٢ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi_{\text{س}} \vee \Psi) \leftrightarrow \bigvee_{\text{س}} \Phi_{\text{س}} \vee \Psi$

مسألة ٤٣ : $\bigvee_{\text{س}} (\Phi \vee \Psi_{\text{س}}) \leftrightarrow \Phi \vee \bigvee_{\text{س}} \Psi_{\text{س}}$

منطق المساواة

بقوامها الحالي ، لا تعجز لغة منطق المحمولات عن معالجة معظم القضايا التي يُحتاج إليها في الرياضيات والعلوم البرهانية. ولكن عند بعض أصناف منها قد تعيق الاستدلال تعقيدات كثيرة ، لذلك كان من المنشود تطوير هذه اللغة في عدة اتجاهات .

٣٣. التوابـــع

العبارات :

أربعة هي مربع اثنين
تسعة هي مجموع ستة وثلاثة
س هي مجموع ع و ف

نستطيع أن نؤديها باللغة المتوفرة لدينا على هذا النحو :

مربع (أربعة ، اثنين)
مجموع (تسعة ، ستة ، ثلاثة)
مجموع (س ، ع ، ف)

حيث يظهر من التركيب ان الرمزين « مربع » و« مجموع » مأخوذان بمثابة محمولين ، يُسند الأول منهما إلى موضوعين ، والثاني إلى ثلاثة ، فيحصل عن كل مركب قضية أو صورة قضية . ولكن إلى جانب هذه الامكانية ، قد تقبل العبارات تحليلا آخر ، يمكن إبرازه بالتقطيع الآتي :

اربعة = مربع (اثنين)
تسعة = مجموع (ستة ، ثلاثة)
س = مجموع (ع ، ف)

وفيه ، خلافاً للسابق ، لا يؤلف أي واحد من المركبات :

مربع (اثنين)
مجموع (ستة ، ثلاثة)
مجموع (ع ، ف)

قضية أو صورة قضية . بل إن امثال هذه المركبات ، على غرار ثوابت ومتغيرات الموضوع ، تشير إلى أفراد وليس إلى أحداث . ولذلك ندرجها مع الموضوعات تحت اسم الحد . أما اللفظتان « مربع » و « مجموع » ، فهما بالتالي لا تقومان في هذا الاستعمال مقام المحمول ، بل تشكلان مع مثيلاتهما من العبارات صنفاً آخر ، يطلق عليه اسم « عبارة التابع » . والتوابع كثيرة الاستعمال في الرياضيات ، بحيث لا يخلو منها فرع من فروع هذا العلم . ففي الأمثلة :

$$س + ع \qquad س \times ع \qquad س - ٤ \qquad \sqrt{س}$$

$$جيب(س) \qquad ٢ + ٣ \qquad ٤^{٣} \ldots$$

الجذر التربيعي والجيب والمكعب هي توابع أحادية ، والجمع والضرب والطرح هي توابع ثنائية . كذلك قد تُسند عبارات التوابع ، أسوة بالمحمولات ، إلى أكثر من حدين ، فتكون عندها ثلاثية ورباعية وخماسية الخ ... وعلى وجه التحديد ، إذا رمزنا إلى متغيرات التوابع بالحروف :

$$ه ، و ، ز$$

$$ه^{١}_{١} ، ه^{١}_{٢} ، ه^{١}_{٣} ، \ldots$$

$$و^{١}_{١} ، و^{١}_{٢} ، و^{١}_{٣} ، \ldots$$

$$ز^{١}_{١} ، ز^{١}_{٢} ، ز^{١}_{٣} ، \ldots$$

واستعملنا الحرف الغليظ « **ه** » كمتغير ماورائي ، للاشارة إلى أي عبارة أو متغير من التوابع ، فإنه يمكن توسيع الحدود في منطق المحمولات ، بحيث أنها تشمل سائر المركبات من الموضوعات وعبارات التابع ومتغيراتها ، وذلك بأن نضيف إلى حساب صياغة منطق المحمولات ، القواعد التالية ، التي تتعين بها بنية الحدود :

$$حد_{١} : \Leftarrow ص$$

أي كل موضوع هو حد . وحرف الـ «س» هنا هو متغير ماورائي للإشارة إلى أي موضوع .

حد$_٢$: ⇐ س

أي كل متغير موضوع هو كذلك حد .

حد$_٣$: ح$_١$ ، ... ، ح$_ن$ ⇐ ة^ن (ح$_١$ ، ... ، ح$_ن$)

أي ، إذا سبق اشتقاق ن حد ح$_١$ ، ... ، ح$_ن$ ، فالمركب الحاصل من من اسناد عبارة أو متغير تابع ة^ن اليها ، هو أيضاً حد .

بناء على هذا الحساب ، تكون المركبات التالية من الحدود :

ع   س   ة (س)   و(س ، ع)

ز(س ، ع ، ف)   ة(س ، و(س ، ع))   ز(ة (س ، و(ع) ، ف))

و(ز(ع ، س ، ف) ، ة (س(، ف))

لا شك أن توسيع مفهوم الحد بهذا الشكل يؤثر أيضاً في بنية الصيغة ، إذ القاعدة التي تضبط تركيب الصيغ البسيطة أعني :

ح$_١$ ، ... ، ح$_ن$ ⇐ ك^ن (ح$_١$ ، ... ، ح$_ن$)

لم تقتصر على اسناد المحمولات إلى ثوابت أو متغيرات الموضوع ، إلا لحصرنا الحد بهذه العبارات . أما وقد توسع تركيب الحد بالقواعد السابقة ، فإن بنية الصيغة تقبل اسناد المحمولات إلى أي نوع من الحدود ، فنحصل عندها على صيغ من التركيب الآتي :

ك(س ، ة(س ، ع))   ل (ة (و(س)) ، ز(س ، ع))

م (و(س) ، ة (ف ، ع) ، ف) الخ ...

يكفي قليل من الروية للتحقق أن سائر النتائج التي اثبتت في باب الدلالة أو في النسق الأكسيومي تبقى صالحة عند زيادة عبارات التوابع على لغة منطق المحمولات . هذا مع التنبه إلى أنه في المسائل التي يجري فيها ابدال الحدود ، بما أن هذه الأخيرة قد يدخل في تركيبها عدة متغيرات في عدة مواقع ، فقولنا «ح هو مطلق لـِ س في Φـ» يعم كل وقوع لكل متغير يرد في ح . أعني أن ح هو مطلق لـِ س في Φـ ، إذا كان كل موقع لكل متغير من ح هو مطلق لـ س في Φـ . وبقول آخر ، إذا لم يصبح أي موقع لمتغير من ح مقيداً في Φح/س .

٣٤. المساواة

بين العلاقات، تلعب المساواة دوراً مهماً. فهي مألوفة في المعادلات الرياضية؟ وفي اللغات الطبيعية تظهر غالباً دون تخصيص، على هيئة اسناد أو حمل أو رابطة، بالاشتراك مع غيرها من العلاقات. ففي القضيتين:

ابن سينا هو فيلسوف

ابن سينا هو مؤلف «الشفاء»

بينما تدل الرابطة الأولى على اسناد المحمول «فيلسوف» إلى الموضوع «ابن سينا»، أي أن ابن سينا هو ضمن مجموعة الفلاسفة، تعني الرابطة الثانية المساواة بين ابن سينا ومؤلف «الشفاء»، أي ان ابن سينا هو ذاته مؤلف «الشفاء». بهذا المعنى الخاص، نريد أن نستعمل علاقة المساواة. فنكتب مثلا:

مساو (س، ع)

أو كما جرت العادة، نستعين بالرمز «=»، متوسطاً الحدين هكذا:

س = ع

لندل بذلك على أن الفرد س هو بعينه الفرد ع. ولسلب هذه العلاقة، أعني ~ (س = ع)، نتبنى أيضاً الاختصار المتعارف «س ≠ ع».

بواسطة المساواة، يمكننا تأدية التسوير العددي، الذي يقوم على تعيين عدد الأفراد في مجال ما، أو بالنسبة لصفة ما. فقولنا:

يوجد على الأقل فردان، تنطبق عليهما الصيغة Φ

نستطيع أن نعبر عنه ، عند اختيار $\Phi\text{ع}$ شبيهة بـ $\Phi\text{س}$ ، على الوجه الآتي :

$$\bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \text{س} \neq \text{ع})$$

وعلى هذا المنوال نتدرج ، فنعبر عن انه « يوجد على الأقل ثلاثة أفراد بتلك الميزة » هكذا :

$$\bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} \bigvee_{\text{ف}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \Phi\text{ف} \wedge \text{س} \neq \text{ع} \wedge \text{س} \neq \text{ف} \wedge \text{ع} \neq \text{ف})$$

وبالاجمال نؤدي قولنا « يوجد على الأقل ن فرد » بـ :

$$\bigvee_{\text{س}_1} \dots \bigvee_{\text{س}_\text{ن}} (\Phi\text{س}_1 \wedge \dots \wedge \Phi\text{س}_\text{ن} \wedge \text{س}_1 \neq \text{س}_2 \wedge \text{س}_1 \neq \text{س}_3$$

$$\wedge \dots \wedge \text{س}_{\text{ن}-1} \neq \text{س}_\text{ن})$$

حيث كل واحدة من $\Phi\text{س}_\text{ي}$ هي شبيهة بالإخرى . وكذلك نستطيع تأدية العبارات المقابلة ، أي « على الأكثر ن فرد ، تنطبق عليهم الصيغة Φ » . فهذه يسهل الحصول عليها من سلب العبارات السابقة ، إذ صدق قولنا « على الأكثر ن فرد » يتلازم مع كذب قولنا « يوجد على الأقل ن + ١ فرد » . وعليه فقولنا « على الأكثر فرد واحد يتصف بـ Φ » يمكن تأديته بـ « لا يوجد على الأقل فردان يتصفان بـ Φ » وبالرموز :

$$\neg \bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \text{س} \neq \text{ع}) .$$

في وجه عام ، لنعبر عن « ن فرد على الأكثر » ، نسلب الصيغ السابقة الموافقة لـ ن + ١ فرد على النحو الآتي :

$$\neg \bigvee_{\text{س}_1} \dots \bigvee_{\text{س}_{\text{ن}+1}} (\Phi\text{س}_1 \wedge \dots \wedge \Phi\text{س}_{\text{ن}+1} \wedge \text{س}_1 \neq \text{س}_\text{ن} \wedge \dots \wedge$$

$$\text{س}_\text{ن} \neq \text{س}_{\text{ن}+1})$$

بالطبع ، يمكن تحويل هذه الصيغ السالبة إلى صيغ موجبة تتلاءم أكثر مع عبارات اللغة الطبيعية المرادفة لها . فمثلا الصيغة :

$$\neg \bigvee_{\text{س}} \bigvee_{\text{ع}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \text{س} \neq \text{ع})$$

هي متلازمة مع : $\bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \neg (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \text{س} \neq \text{ع})$

وهذه بدورها مع : $\bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \rightarrow \text{س} = \text{ع})$.

وفقاً لهذا التحويل ، تصبح الصيغ المعبرة عن « فردين على الأكثر »،... « ن فرد على الأكثر » هكذا :

$$\bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} \bigwedge_{\text{ف}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \wedge \Phi\text{ف} \rightarrow \text{س} = \text{ع} \vee \text{س} = \text{ف} \vee \text{ع} = \text{ف})$$

$$\bigwedge_{\text{س}_1} \ldots \bigwedge_{\text{س}_{\text{ن}+1}} (\Phi\text{س}_1 \wedge \ldots \wedge \Phi\text{س}_{\text{ن}+1} \rightarrow \text{س}_1 = \text{س}_2 \vee \ldots \vee \text{س}_{\text{ن}} = \text{س}_{\text{ن}+1})$$

يجب التنبه إلى أن تأديتنا الرمزية لـ « على الأكثر ن فرد » لا تتطلب بالضرورة وجود فرد ما تنطبق عليه Φ ، أي قد تصدق التأدية حتى عند عدم وجود أي فرد من هذا النوع .

أخيراً ، فالتعبير عن « وجود ن فرد بالضبط ، تنطبق عليهم Φ » يمكن الحصول عليه بتركيب صيغة متصلة من النوعين الآنفي الذكر . فهكذا يمكن التعبير عن « وجود فرد واحد بالضبط » بـ :

$$\bigvee_{\text{س}} \Phi\text{س} \wedge \bigwedge_{\text{س}} \bigwedge_{\text{ع}} (\Phi\text{س} \wedge \Phi\text{ع} \rightarrow \text{س} = \text{ع})$$

وعن « وجود فردين بالضبط » بـ :

$$\bigvee_{\text{س}}\bigvee_{\text{ع}}(\Phi_{\text{س}} \wedge \Phi_{\text{ع}} \wedge \text{س} \neq \text{ع}) \wedge \bigwedge_{\text{س}}\bigwedge_{\text{ع}}\bigwedge_{\text{ف}}(\Phi_{\text{س}} \wedge \Phi_{\text{ع}} \wedge \Phi_{\text{ف}} \rightarrow \text{س} = \text{ع} \vee \text{س} = \text{ف} \vee \text{ع} = \text{ف}) \quad \text{الخ ...}$$

ولكن من الممكن أيضاً تأديتها بصيغ أكثر اختصاراً . فقولنا الأول يمكن التعبير عنه بـ :

$$\bigvee_{\text{س}}(\Phi_{\text{س}} \wedge \bigwedge_{\text{ع}}(\Phi_{\text{ع}} \rightarrow \text{ع} = \text{س}))\text{،}$$

أو أيضاً بـ :

$$\bigvee_{\text{س}}\bigwedge_{\text{ع}}(\Phi_{\text{ع}} \leftrightarrow \text{ع} = \text{س})$$

والثاني بـ :

$$\bigvee_{\text{س}}\bigvee_{\text{ع}}(\Phi_{\text{س}} \wedge \Phi_{\text{ع}} \wedge \text{س} \neq \text{ع} \wedge \bigwedge_{\text{ف}}(\Phi_{\text{ف}} - \text{ف} \neq \text{س} \vee \text{ف} \neq \text{ع})) \quad \text{الخ ...}$$

إذا ما وضعنا لعلاقة المساواة حساباً خاصاً ، بالاضافة إلى حساب المحمولات ، ينشأ عندنا ما يسمى بحساب المحمولات مع المساواة . فلتعيين صيغ اللغة الموسعة ، نحتاج أولا إلى زيادة القاعدة التالية على حساب الصياغة وهي :

$$\text{صغ}_{٧} : \text{ح}_{١} \text{، ح}_{٢} \Leftarrow \text{ح}_{١} = \text{ح}_{٢}$$

أعني أنه يجوز تركيب صيغة من أي حدين $\text{ح}_{١}$ و$\text{ح}_{٢}$ بوضع رمز المساواة بينهما. فهكذا مثلا :

س = ع

ه (س) = ع

ه (س) = و(ع)

ه (و(س)) = ز (ع)

و (س ، ص) = ه (ز(ع ، ف ، ص))

هي صيغ وفق القاعدة المذكورة .

فيما يتعلق بتفسير المحمول الثنائي « = » بالنسبة إلى مجموعة من الأفراد ج ، فاننا ندل به على المساواة بين أفراد هذه المجموعة . أي اننا ، من حيث الماصدق نعني بمدلول المحمول « = » المجموعة أج التي تتألف من أزواج متساوية ينتمي أفرادها إلى ج . فان كانت ج على سبيل المثال :

{ ٢ ، ٣ ، ٨/٤ }

تألفت أج من :

{ (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٨/٤ ، ٨/٤) ، (٢ ، ٨/٤) ، (٨/٤ ، ٢) }

بناء على ذلك يتحدد تقيم المساواة بالمعيار الآتي :

٩. فج حو ح١ = ح٢ فقط إذا (فج (ح١) ، فج (ح٢)) ∈ أج

أعني أن التفسير فج يحقق الصيغة ح١ = ح٢ ، عند كون الزوج (فج (ح١) ، فج (ح٢)) عنصراً من عناصر المجموعة أج .

بين صيغ المساواة ، التي تصح وفقاً لهذا المعيار ، الصيغتان الآتيتان :

٦. $\bigwedge_{س}$ (س = س)

٧. س = ع ← ($\Phi_{س}$ ← $\Phi_{س}^{ع}$) شرط أن يكون ع مطلقاً لـ س في المواقع التي ينوب فيها عنه .

فالصيغة الثانية تنص على أنه إذا تساوى س و ع ، فإنه يجوز أن ينوب ع مناب س في الصيغة Φ مرة أو أكثر ، عندما لا يخالف ذلك الشرط المذكور . وبقول آخر ، إذا تساوى س و ع ، فكل ما يقال على س يقال على ع . بهاتين الصيغتين تتعين المساواة على التواطؤ ، إذ كلما وجدت علاقتان ، لنقل $=_{1}$ و $=_{2}$ تتمتع كل منهما بـ ٦ و ٧ معاً ، لزم عن ذلك أن :

س $=_{1}$ ع ↔ س $=_{2}$ ع .

لاقامة نسق أكسيومي يشمل منطق المحمولات مع المساواة . يكفي الأخذ بـ ٦ كسلمة وبـ ٧ كشكل مسلمات بالاضافة إلى أشكال المسلمات السابقة . في هذه الحال ، تستقيم أيضاً سائر النتائج التي حصلنا عليها في منطق المحمولات وفوق ذلك نحصل بالطبع على مسائل جديدة تتعلق بالمساواة . إليك بعض البراهين على الخصائص الأساسية للمساواة .

مسألة ١ (التناظر) : س = ع ← ع = س

برهان :

١. (س = ع) ← (س = س ← ع = س)   سل$_{٧}$ حيث $\Phi_{س}$ هي س = س ، و $\Phi_{س}^{ع}$ هي س = ع

٢.	(س = س) ← (س = ع ← ع = س)	مق* ؛ ١
٣.	⋀ س (س = س)	سل$_{٦}$
٤.	س = س	حذف ⋀ ؛ ٣
٥.	س = ع ← ع = س	ضع ؛ ٤ ، ٢ .

مسألة ٢ (التعدي) : س = ع ∧ ع = ف ← س = ف

برهان :

١.	س = ع ∧ ع = ف	فرضية
٢.	س = ع	مق ؛ ١
٣.	ع = ف	مق ؛ ١
٤.	س = ع ← ع = س	مسألة ١
٥.	ع = س	ضع ؛ ٢ ، ٤
٦.	ع = س ← (ع = ف ← س = ف)	سل$_{٧}$
٧.	ع = ف ← س = ف	ضع ؛ ٥ ، ٦
٨.	س = ف	ضع ؛ ٣ ، ٧
٩.	س = ع ∧ ع = ف ← س = ف	نبط ؛ ١ ـ ٨

---

* بالاستعانة بالمسألة (ب ← (ج ← د)) ← (ج ← (ب ← د))

مسألة ٣ (المناب في الحدود) : س = ع ← حـِ = حـِعْ ، حيث حـِ هو من الحدود التي قد تحتوي على س .

برهان :

١.	س = ع ← (حـِ = حـِ ← حـِ = حـِعْ)	سس٧
٢.	حـِ = حـِ ← (س = ع ← حـِ = حـِعْ)	مق ؛ ١
٣.	$\bigwedge$ (س = س)	سل٦
٤.	حـِ = حـِ	حذف $\bigwedge$ ، ٣
٥.	س = ع ← حـِ = حـِعْ	ضع ؛ ٤ ، ٢

المساواة ، كما ضُبطت في هذا الفصل ، تتمتع ، إلى جانب خصائص الانعكاس والتناظر والتعدي ، بخاصة المناب في الصيغ وفي الحدود . أحياناً ، تُستعمل المساواة بالمعنى الأعم الذي لا يتطلب المناب ، ويطلق عليها عندئذ اسم التكافؤ . فمثلا التساوي في الطول بين الخطوط ، والتشابه بين المثلثات ، والسكن في بلد واحد بين المواطنين ... الخ تنتمي إلى علاقة التكافؤ ، لاتصافها بالانعكاس والتناظر والتعدي ؛ ولكنها لا تندرج تحت المساواة ؛ لافتقارها إلى المناب . فليس كل ما يقال على خط يقال على مساويه في الطول ، ولا كل ما يقال على مثلث يقال على شبيهه الخ ... ويرجع الاختلاف بين المساواة والتكافؤ من الناحية الدلالية ، إلى ان الاولى تقتصر على وحدة الذات بين الأفراد ، بينما الثانية تقبل اشتراك الصفات بين أفراد متغايرة .

٣٥. الرسم الفردي

للدلالة على فرد مخصوص ، ثمة تعابير سوى أسماء العلم ، تستخدمها اللغات الطبيعية . ففي العربية ، للمحمول المصحوب بلام العهد هذه الوظيفة ، وكذلك هو عمل الكنية واللقب وغيرها من المركبات . من قبيل هذه العبارات الأمثلة الآتية :

١. الشارح

٢. اللص الظريف

٣. أبو زياد

٤. العاصمة اللبنانية

٥. مؤلف « ألف ليلة وليلة »

٦. أعلى جبل في العالم

٧. رائد الثورة العربية

٨. جذر ٢ التربيعي

٩. الحرم الأقصى

فكل واحدة من هذه العبارات وُضعت لترسم فرداً معيناً من الأفراد ، بعضها له اسم علم كَ« محمد » للشارح ، و« بيروت » للعاصمة اللبنانية ، وبعضها ليس له كما هي الحال مع مؤلف « ألف ليلة وليلة » والحرم الأقصى . أمـا الفائدة من استعمالها ، عند وجود أسماء علم مرادفة لها ، فتقتصر على أغراض

بيانية ؛ وعند افتقار المسميات لمثل هذه الأسماء، فهي البديل الذي يلبي الحاجة الوقتية . وفي عرف اللغة ، تفترض هذه العبارات ، التي نخصها باسم «الرسوم الفردية » ، وجود الفرد المرسوم . فالأقوال :

متحف القاهرة واسع

رحلت العنقاء الطروب

تخالف الاستعمال الصحيح ، إذ في القول الأول ، لا يتخصص المركب «متحف القاهرة » بمدلول واحد ، لوجود أكثر من متحف في القاهرة ، وبالتالي حملنا صفة الواسع عليه لا يخلو من الالتباس . وفي القول الثاني أطلقنا حكماً وجودياً على كائن لا وجود له أعني على العنقاء الطروب . فهذان الشرطان أي الوجود والوحدانية ، لا يمتنع علينا تحقيقهما في اللغة الرمزية المتوفرة لدينا . وذلك باللجوء إلى السور البعضي والمساواة . فقولنا :

الشارح هو طبيب

نترجمه بـ :

⋁س (شارح (س) ∧ ⋀ع (شارح (ع) ← ع = س) ∧ طبيب (س))

وقولنا :

العاصمة اللبنانية دافئة

بـ :

⋁س ((عاصمة (س) ∧ لبنانية (س)) ∧ ⋀ع (عاصمة (ع) ∧ لبنانية (ع) ← ع = س) ∧ دافئة (س))

وقس على ذلك سائر القضايا .

إلى جانب الطريقة المذكورة في تأدية الرسوم الفردية، ثمة طريقة أخرى تماشي عن كثب تعابير اللغة الطبيعية . فالرسوم الفردية يمكن سكبها بالقالب الآتي :

الفرد الذي هو الشارح

الشيء الذي يقال عنه أعلى جبل في العالم

الخ ...

وعلى العموم :

أل سـ الذي يقال عنه Φسـ

حيث Φسـ هي صيغة لا تحتوي من المتغيرات المطلقة إلا على سـ . طبقاً لهذا ، سوف نؤدي الرسوم الفردية ، باللغة الرمزية ، على هذا الشكل :

ɿسـ شارح (سـ)

ɿسـ Φسـ

فالرمز الجديد « ɿ » ، الذي نسميه العامل إيوتا iota ، نسبة للحرف اليوناني المستعار منه ، شبيه بالأسوار من حيث التقييد ، إذ نطاق معموله يتحدد بالضوابط نفسها ، التي اتفقنا عليها . ففي « ɿسـ شارح (سـ) » المتغير « سـ » هو مقيد ، كما هي الحال مع السور في القضية « ⋀سـ شارح (سـ) » . ولكن بالطبع ، فالاختلاف جوهري بين العامل والسور ، إذ حاصل المركب الذي يدخل عليه العامل هو حد ، بينما حاصل ذلك المركب مع السور هو صيغة .

بواسطة العامل « ɿ » ، نختصر ترجمة المثلين السابقين على هذا النحو :

قاضي (ﺇ شارح (س))

دافئة (ﺇ (عاصمة (س) ∧ لبنانية (س))) .

وكذلك ، سائر الأقوال التي تقال على فرد معين مخصوص ، والتي عبرنا عنها بالمساواة والسور البعضي ، كما سلف بيانه ، يمكن أن نختصرها بالعبارات التي تحتوي على « ﺇ » . بالتالي ، تتيح لنا هذه الامكانية ادخال العبارات المذكورة عن طريق التعريف . وعليه ، نضع في وجه عام :

تعريف ١ : Ψ (ﺇ Φس) ⇆ ⋁ (Φس ∧ ⋀ (Φع ← ع = س) (Ψ س)) .

يجب التنبه إلى أن هذا التعريف لا ينفرد بالعبارة ﺇ Φس منفصلة ، بل ينطبق على كامل الصيغة Ψ (ﺇ Φس) ، وبالتالي ، ليست العبارة ﺇ Φس اختصاراً لعبارة أخرى ، بل بالأحرى الصيغة Ψ (ﺇ Φس) هي كذلك. فالتعريف المذكور يضبط فقط كيفية ابدال الصيغ بصيغ جديدة ، تتضمن عبارات الـ ﺇ Φس .

إلى الآن، انطلاقاً من اعتبارات لغوية ، استعملنا الرسوم العينية بالنسبة إلى الصيغ المحصورة . لكنه من الجائز أيضاً اشاعة هذا الاستعمال على الصيغ المهملة . فالعبارات التالية ، مثلا :

ﺇ تلد (س ، ع)

ﺇ يتوسط (س ، ع ، ف)

ﺇ (س + ع = ف)

تؤلف رسوماً مهملة . بالطبع ، هذه الرسوم بحد ذاتها لا تدل على فرد واحد ، ولكنها تفعل ذلك ، إذا ما أخذت المتغيرات المطلقة قيما فردية . فالرسم :

$$\iota_{\text{س}}\ \text{تلد}\ (\text{س ، ع})$$

يدل على حواء ، حين اسنادنا قايين إلى المتغير « ع » . وفي :

$$\iota_{\text{ف}}\ (\text{س} + \text{ع} = \text{ف})$$

يختص المدلول بالعدد ٥ ، عندما يأخذ «س» القيمة ٣ ، و«ع» القيمة ٢ . وفي وجه عام ، إذا كانت Φ س١ ، ... ، سن ، ع صيغة تحتوي على ن متغير موضوع سوى اا ع ، فإن الرسم :

$$\iota_{\text{ع}}\ \Phi\ \text{س}_{1}\text{ ، ... ، س}_{\text{ن}}\text{ ، ع}$$

يشير إلى فرد واحد موجود ، كلما أسندت إلى المتغيرات قيمة معينة . يتضح لنا من ذلك ، أن إدخال العامل « ℩ » على صيغ القضايا ، التي تحتوي بعد على متغيرات موضوع مهملة ، يحول هذه الصيغ إلى حدود . فبالنسبة إلى الأمثلة السابقة تصدق المعادلات الآتية :

$$\bigwedge_{\text{ع}}\ (\text{والدة (ع)} = \iota_{\text{س}}\ \text{تلد (س ، ع)})$$

$$\bigwedge_{\text{ع}}\bigwedge_{\text{ف}}\ (\text{وسط (ع ، ف)} = \iota_{\text{س}}\ \text{تتوسط (س ، ع ، ف)})$$

$$\bigwedge_{\text{س}}\bigwedge_{\text{ع}}\ (\text{س} + \text{ع} = \iota_{\text{ف}}\ (\text{س} + \text{ع} = \text{ف}))$$

هذا ما يفتح لنا المجال في ادخال توابع جديدة بواسطة العامل « ℩ » . فإدخال تابع ما ه^{ن} ذي ن متغير موضوع ، يتم بوضعنا أن :

تعريف ٢ : ه^{ن}(س١ ، ... ، سن) ⇋ ℩$_{ع}$ Φ س١ ، ... ، سن ، ع .

ومن الواضح أن العكس أيضاً جائز ، أعني إدخال العامل « ℩ » في نسق يحتوي على توابع . إذ كل حد يمكن تمثيله بواسطة العامل « ℩ » وفقاً لهذه المساواة :

ح = ℩$_{س}$ (ح = س) .

في صيغة تحتوي على أكثر من متغير موضوع مطلق ، يمكن أن تتداخل العوامل « ℩ » ، إن توافرت الشروط التي يفرضها التعريف ١ . فإن تقيدت كل المتغيرات ، تخصصت الدلالة بفرد واحد ؛ وإن بقي ، مع إدخال العوامل « ℩ » متغيرات موضوع ، تعينت لدينا حدود ذوات متغيرات .

يظهر لنا مما سبق اننا ، في منطق المحمولات مع المساواة ، لا نحتاج سوى للمحمولات ومتغيرات الموضوع ، اما الموضوعات وعبارات التوابع ، فيمكن الاستغناء عنها ، وذلك بإضافة محمولات جديدة موافقة لها ، حسب الشروط التي ضبطناها في هذا الفصل .

٣٦. التجريـــد

وسائل اللغة الرمزية بإمكانياتها الحاضرة ، لا يسمح لنا بتركيب محمول من عدة محمولات ، كما هو شائع في اللغة الطبيعية . ففي الجمل الآتية :

أفلاطون   شاعر وفيلسوف

المعرفة   علمية أو أدبية

الموظفون المتزوجون   يستفيدون من المنحة

تؤلف العبارات «شاعر وفيلسوف» و« علمية أو أدبية » و« الموظفون المتزوجون» محمولات مركبة . لا شك اننا باستعارة الكلمات المناسبة لكل محمول داخل في تركيب العبارات المذكورة ، نستطيع أن نفصّل القضايا السابقة على هـــذا النحو :

شاعر (أفلاطون) ∧ فيلسوف (أفلاطون)

معرفة (س) ← علمي (س) ∨ أدبي (س)

موظف (س) ∧ ⋁ع زوجة (ع ، س) ← يستفيد من المنحة (س)

حيث يستقل كل محمول بقضية فرعية . ولكن يمتنع علينا اظهار المحمولات المركبة على غرار اللغة الطبيعية .

لهـــذا الغرض نريــــد أن نستعين بعامل جــــديد يخولنا أن نجرد من قضية تحتوي على عدة محمولات ، الصفة المركبة التي تحمل على أفراد القضية ، أو بتعبير ماصدقي ، أن نجرد المجموعة المركبة التي ينتمي إليها الأفراد . ونخص

هذا العامل الذي نرمز اليه بحرف « λ » باسم عامـــل التجريد . فهكذا مثلاً ، لانتزاع صفة أو مجموعة (العلمي أو الأدبي) من القضية :

علمي (س) ∨ أدبي (س)

نصدّرها بالعامل « λ » وتحته المتغير الدال على الأفراد التي تشملها الصفة او المجموعة المراد تجريدها ، فنكتب :

λ (علمي (س) ∨ أدبي (س))
س

وهو تعبير يجاري قولنا :

الماهو علمي أو الماهو أدبي

أو أيضاً : مجموعة الأمور التي هي اما علمية أو أدبية

وكذلك نفعل بالنسبة لتجريد صفة أو مجموعة (الشعراء والفلاسفة) و (صفة أو مجموعة الموظفون المتزوجون) . فنضع :

λ (شاعر (س) ∧ فيلسوف (س))
س

λ (موظف (س) ∧ ∨ زوجة (ع ، س)) .
س ع

أمثال هذه العبارات التي يحصل بها التجريد . تتألف من العامل « λ » ومن معموله ، والمعمول ، إذا خلا من الروابط ، هو الصيغة التي تلحق العامـــل مباشرة . وإلا فهو الصيغة التي يضمها من بعده قوسان . والمتغير الواقع تحت العامل « λ » أو في معموله ، يكون متغيراً مقيداً . أما سائر الصيغة التي يدخل عليها العامل « λ » فتتحول إلى محمول .

ما وضعناه بشأن تجريد الصفات أو المجموعات ، يمكن تطبيقه على تجريد العلاقات أو المجموعات المؤلفة من ن ـيات مرتبة (ن > ١)، فهكذا مثلا من الصيغتين :

$\bigvee_{ف}$ (ابن (س ، ف) ∧ أخ (ف ، ع))

دفع (س ، ع ، ف) ∨ ~ يتدين (س ، ع ، ف)

نؤلف مع العامل « λ » المقرون بعدة متغيرات ، المحمول الثنائي « ابن الأخ » والمحمول الثلاثي « الدافعون أو غير المتدينين » على هذا النحو :

$\lambda_{س،ع}$ $\bigvee_{ف}$ (ابن (س ، ف) ∧ أخ (ف ، ع))

$\lambda_{س،ع،ف}$ دفع (س ، ع ، ف) ∨ ~ يتدين (س ، ع ، ف) .

وفي وجه عام ، إذا كانت Φ س$_{١}$ ، ... ، س$_{ن}$ صيغة تحتوي على متغيرات الموضوع س$_{١}$ ، ... ، س$_{ن}$ ، فالمركب $\lambda_{س_{١}،...،س_{ن}}$ Φ س$_{١}$ ، ... ، س$_{ن}$ هو محمول ذو ن محل . يظهر من مفهوم العوامل ، أن تكرارها وراء بعضها البعض غير جائز ، لأن العامل « λ » انما يُسند إلى الصيغة فحسب ، فمتى اسندنا عاملا واحداً إلى صيغة ما ، تحولت هذه إلى محمول وامتنع اسناد عامل آخر .

بواسطة العامل « λ » يتأتى لنا أن ندخل على المجموعات عمليات موازية للروابط المنطقية . فبإزاء السلب نحصل على ما يسمى بمعدول المجموعة ، ويُرمز إليه عادة بـ « ∁ » . وتعريفه هو الآتي :

∁ك = λ ~ ك (س) .

أما الروابط الثنائية ؛ فالوصل منها تقابله العملية المسماة بالتقاطع « ∩ » وهي تعرّف بـ :

ك ∩ ل ⇋ λس (ك (س) ∧ ل (س))

والفصل تقابله عملية الاتحاد « ∪ » على هذا النحو :

ك ∪ ل ⇋ λس (ك (س) ∨ ل (س)) .

للمقارنة بين المجموعات ، تقوم مقام « ↔ » ، علاقة تدل على التساوي من حيث الماصدق ، أي من جهة الأفراد المتدرجة تحت كل من المحمولين. ونطلق على هذه العلاقة ، التي نخصها بالرمز « ≡ » اسم « التعادل » ، ومرجعها إلى :

ك ≡ ل ⇋ ⋀س ك (س) ↔ ل (س) .

من الواضح أن علاقة التعادل تشكل علاقة تكافؤ بين المجموعات ، بمعنى أنها تتمتع بخصائص الانعكاس والتبادل والتعدي ؛ ولكنها ، على العموم ، لا تسمح بإنابة المجموعات بعضها عن بعض ، كما هي الحال مع المساواة . وأخيراً فمقام « ← » تقوم علاقة التضمن « ⊇ » ، وفقاً لهذا التعريف :

ك ⊇ ل ⇋ ⋀س ك (س) ← ل (س) .

بما أن العبارات الناجمة عن التجريد بواسطة العامل « λ » هي محمولات ، كان بالامكان أيضاً اسنادها إلى حدود ، بحيث يتكون عنها صيغ جديدة ، ومن قبيل ذلك هذه المركبات :

$\lambda_{س}$ (شاعر (س) ∧ فيلسوف (س)) (أبو العلا)

$\bigvee_{ص}$ ($\lambda_{س ، ع}$ $\bigvee_{ف}$ (ابن (س ، ف) ∧ أخ (ف ، ع))) (ص ، حسين)

وفي وجه عام : $\lambda_{س_1 ، ... ، س_ن}$ Φ س$_1$ ، ... ، س$_ن$ (ح$_1$ ، ... ، ح$_ن$) .

في لغة المجموعات ، جرت العادة بالتعبير عن الاسناد بالرمز « ∋ » ، الذي هو تحوير لأول حرف من فعل « كان » اليوني « ἐστί » . فيكتب مثلا :

ك ∋ ك ∪ ل

ع ∋ ∁ (ل ∩ م)

... الخ

ويقرأ : س هو عنصر من اتحاد المجموعتين ك و ل

ع هو عنصر من معدول تقاطع المجموعتين ل و م

... الخ

فالجزء من نظرية المجموعات ، الذي يشتمل فقط على مسائل خاصة بهذه العمليات ، ليس سوى منطق صوري بعبارات أخرى .

● ● ●

المراجع

مداخل عامة

Blanché, R., Introduction à la logique contemporaine. Paris, A. Colin, 4e éd., 1968.

Bochenski, I.M., Précis de logique mathématique. Bussum, Kroonder, 1948.

Carnaps, R., Einführung in die symbolische Logik. Wien. New York, Springer, 3. Aufl., 1968.

Copi, I.M., Symbolic logic. New York, Macmillan, 1954.

Dopp, J., Notions de logique formelle. Paris, Ed. Béatrice – Naurvelaerts, 1965.

Grize, J., Logique moderne. Paris, Gauthier-Villars, fascicule I, 1969, fascicule II, 1971.

Hasen, .eger, C , Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik. Freiburg - München, 1962.

Hughes, G.E., and Londey, D.G., The elements of formal logic. London, Methuen, 1965.

Kalish, D. and Montague R., Logic. Techniques of formal reasoning New York - Burlingame, 1964.

Lorenzen, P., Formale Logik. Berlin, Walter de Gruyter, 3. Aufl., 1967.

Quine, W.V.O., Methods of logic. New York, Holt Rinehart and Winston, rev. ed., 1956.

Reichenbach, H., Elements of symbolic logic. New York, Macmillan, 1948.

Suppes, P., Introduction to logic. Princeton, Van Nostrand, 1957.

Tarski, A., Introduction to logic. Oxford University Press, 1941.

مراجع عليا

Beth, E.W., The foundations of mathematics. Amsterdam, North-Holland Pub., 1959.

Church, A., Introduction to mathematical logic vol I. Princeton, Princeton Univ. Press, 1956.

Curry, H.B., Foundations of mathematical logic. New York, Mc Graw-Hill, 1963.

Fraïssé, R., Cours de logique mathématique. Paris, Dunod, vol. I, 2e éd., 1971, vol. II, 1972.

Hilbert, D. und Ackermann, W., Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, Springer, 5. Aufl., 1967.

Heyting, A., Intuitionism. An introduction. Amsterdam, North-Holland Pub., 1956.

Kleene, S.C., mathematical logic. New York, Wiley, 1967.

Kleene, S.C., Introduction to metamathematics. New York, Van Nostrand, 1964.

Kreisel, G. et Krivine, J.L., Eléments de logique mathématique. Paris, Dunod, 1967.

Lorenzen, P., Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin, Springer, 2. Aufl., 1969.

Lorenzen, P., Metamathematik. Mannheim, Bibliogr. Institut, 1962,

Martin, R., Logique contemporaine et formalisation. Paris, P.U.F., 1964.

Mendelson, E., Introduction to mathematical logic. New York, Van Nostrand, 1964.

Novikov, P.S., Introduction à la logique mathématique. Paris, Dunod, 1964.

Prior, A.N., Formal logic. Oxford, Clarendon Press, 2d ed., 1962.

Quine, W.V.O., Mathematical logic. New York, Harvard Univ. Press, rev. ed., 1951.

Rosser, J.B., Logic for mathematicians. New York, McGraw-Hill, 1953.

Scholz, H. und Hasenjaeger, G., Grundzüge der mathematischen, Logik. Berlin, Springer, 1961.

Schütte, K.,Beweistheorie. Berlin, Springer, 1960.

كتب ذات أهمية تاريخية في تطور المنطق عند العرب

ابن تيمية ، تقي الدين أبو العباس ، كتاب الرد على المنطقيين . بمباي ، ١٩٤٩ .

ابن سينا ، أبو علي ، كتاب الاشارات والتنبيهات . القاهرة ، دار المعارف ، ١٩٦٠ .

ابن سينا ، ابو علي ، كتاب الشفاء ، المنطق . القاهرة ، المطبعة الأميرية ، ١٩٥٢ — ١٩٥٩ .

الأبهري ، أثير الدين ، إيساغوجي في المنطق * .

الأرموي ، سراج الدين أبو الثناء ، مطالع الأنوار في الحكمة والمنطق .

التحتاني ، قطب الدين الرازي ، شرح الرسالة الشمسية .

التحتاني ، قطب الدين الرازي ، شرح مطالع الأنوار .

الخبيصي ، عبيد الله بن فضل الله ، التذهيب في شرح التهذيب .

الخونجي ، أفضل الدين أبو عبدالله ، كشف الأسرار عن غوامض الأفكار .

* الكتب الواردة دون ذكر الطبعة ، هي مخطوطات أو طبعات قديمة واسعة الانتشار .

السكاكي ، أبو يعقوب ، مفتاح العلوم .

السنوسي ، أبو عبدالله ، شرح المختصر في المنطق .

الفارابي ، أبو نصر ، كتاب الألفاظ المستعملة في المنطق . بيروت ، دارالمشرق ١٩٦٨ .

الكلنبوي ، اسماعيل بن مصطفى ، البرهان في علم الميزان .

مصادر المنطق الحديث

Bolzano, B., Wissenschaftslehre. 4 Bde, Neudruck, Leipzig, W. Schulz, 1929 – 1931.

Boole, G., The mathematical analysis of logic. Oxford, Blackwell, 1948.

Carnap, R., Meaning and necessity. Chicago, the University of Chicago Press, 2d ed. 1956.

Couturat, L., La logique de Leibniz d'après des documents inédits. Paris, 1901.

Frege, G., Begriffsschrift. Halle, Verlag von L. Nebert, 1879.

Frege, G., Über Sinn und Bedeutung. Zeitsch. f. Philos. u. philos. Krit. 100, 1892.

Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen. Math. Zeitsch. 39, 1934.

Gödel , K., Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. f. Mathem. u. Phys. 37, 1930.

Herbrand, J., Ecrits logiques. Paris, P.U.F., 1968.

Peano, G., Formulaire de mathématiques 2, 6 1. Logique mathématique. Turin, 1897.

Tarski, A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia Philosophica, Lemberg 1, 1936.

Whitehead, A.N. and Russell, B., Principia mathematica. 3 vol., Cambridge, Univ. Press, 1910 - 1913.

Wittgenstein, L., Tractatus logico-philosophicus. London, Routledge, 1949.

في تاريخ المنطق

Blanché, R., La logique et son histoire. D'Aristote à Russell. Paris, A. Colin, 1970.

Bochenski, J.M., Formale Logik. Freiburg, Karl Alber, 3. Aufl., 1970

Kneale, W. and M., The development of logic. Oxford, Clarendon, Press, 1962.

Scholz, H., Abriss der Geschichte der Logik. Freiburg, 2. Aufl., 1959.

فهرس الرموز

الموضوعات :

س ، ع ، ف ، ص

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ...

$ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، ...

$ف_1$ ، $ف_2$ ، $ف_3$ ، ...

متغيرات الموضوع :

سـ ، عـ ، فـ ، صـ

$سـ_1$ ، $سـ_2$ ، $سـ_3$ ، ...

$عـ_1$ ، $عـ_2$ ، $عـ_3$ ، ...

$فـ_1$ ، $فـ_2$ ، $فـ_3$ ، ...

متغيرات التابع :

هـ ، و ، ز

$هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$

$و_1$ ، $و_2$ ، $و_3$ ، ...

$ز_1$ ، $ز_2$ ، $ز_3$ ، ...

متغيرات المحمول :

ك ، ل ، م ، ن

ك_1^1 ، ك_2^1 ، ك_3^1 ، ... ، ك_1^2 ، ك_2^2 ، ... ، ك_1^3 ، ...

ل_1^1 ، ل_2^1 ، ل_3^1 ، ... ، ك_1^2 ، ل_2^2 ، ... ، ل_1^3 ، ...

م_1^1 ، م_2^1 ، م_3^1 ، ... ، م_1^2 ، م_2^2 ، ... ، م_1^3 ، ...

حروف مختلفة :

تابع التقيم : ق

تابع التفسير : ف

رابط ثنائي : ر^{2}

رمز لمجموعة ما : ج

رمز لمجموعة الأزواج المتساوية التي ينتمي كل فرد منهما إلى ج : أج

متغيرات ما ورائية :

لمتغيرات الموضوع : س ، س_1 ، س_2 ، س_3 ، ... ، ع

للمحمولات أو لمتغيرات المحمول : **ك**

لعبارات التابع أو لمتغيرات التابع : **ه**

للحدود : ح

لمتغيرات القضية : **ب** ، ب_1 ، ب_2 ، ب_3 ، ...

للصيغ الأولية المنفصلة : **ف** ، ف_1 ، ف_2 ، ف_3 ، ...

للصيغ الأولية المتصلة : **و** ، و_1 ، و_2 ، و_3 ، ...

للصيغ الصحيحة : T

للصيغ المتناقضة : ⊥

للصيغ : Φ ، Φ_1 ، Φ_2 ، ...

Ψ ، Ψ_1 ، Ψ_2 ، ...

X ، Ω ، I

لمجموعة من الصيغ : Δ

وقوع العبارات . الابدال والمناب :

الصيغة Φ التي يقع فيها متغير القضية **ب** : $\Phi_{\text{ب}}$

الصيغة Φ التي تقع فيها متغيرات القضية **ب**$_1$ ، **ب**$_2$ ، **ب**$_3$ ، ... : $\Phi_{\text{ب}_1 ، \text{ب}_2 ، \text{ب}_3 ، \ldots}$

الصيغة Φ التي تقع فيها الصيغة Ψ : Φ_{Ψ}

الصيغة Φ التي يقع فيها متغير الموضوع س مطلقاً : $\Phi_{\text{س}}$

الصيغة Φ التي تقع فيها متغيرات الموضوع س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، ... مطلقة : $\Phi_{\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 ، \ldots}$

الحد ح الذي يقع فيها المتغير س : $\text{ح}_{\text{س}}$

الصيغة الناجمة عن ابدال **ب** بـ Ψ في Φ : $\Phi_{\Psi/\text{ب}}$

الصيغة الناجمة عن ابدال **ب**$_1$ بـ Ψ_1 ، **ب**$_2$ بـ Ψ_2 ، **ب**$_3$ بـ Ψ_3 ، ... في Φ : $\Phi_{\Psi_1/\text{ب}_1 ، \Psi_2/\text{ب}_2 ، \Psi_3/\text{ب}_3 ، \ldots}$

الصيغة الناجمة عن انابة X مناب Ψ في Φ : Φ^{X}_{Ψ}

الحد الناجم عن انابة ع مناب س في ح : $\text{ح}^{\text{ع}}_{\text{س}}$

الروابط :

السلب : ~

الوصل : ∧

الفصل : ∨

الشرط : ←

الشرط المعكوس : →

التشارط : ↔

منع الوصل : ↑

منع الفصل : ↓

.... : ⤚

.... : ⤙

التباين : ⤚⤙

الاسوار :

السور الكلي : ⋀

السور البعضي : ⋁

العوامل :

الرسم الفردي :

التجريد : λ

رموز العمليات :

العدول : $\complement$

التقاطع : $\cap$

الاتحاد : $\cup$

رموز العلاقات :

الانتماء : $\ni$

التضمن : $\supseteq$

التعادل : $\equiv$

المساواة : $=$

رموز خاصة باللغة الماورائية :

القاعدة : $\Leftarrow$

التعريف : $\leftrightharpoons$

الاشتقاق : $\dashv$

Φ قابلة للاستنباط عن مجموعة من الفرضيات Δ : $\Delta \vdash \Phi$

Φ قابلة للاستنباط عن الفرضيات Φ_1 ، ... ، Φ_n : Φ_1 ، ... ، $\Phi_n \vdash \Phi$

Φ قابلة للبرهان : $\vdash \Phi$

Φ تلزم عن المجموعة Δ ، على المجال ج : $\Delta \models_{ج} \Phi$

Φ تلزم عن Φ_1 ، ... ، Φ_n ، على المجال ج : Φ_1 ، ... ، $\Phi_n \models_{ج} \Phi$

Φ تلزم عن Δ : $\Delta \models \Phi$

Φ تلزم عن $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن}$: $\Phi_{١}$ ، ... ، $\Phi_{ن} \models \Phi$

Φ هي صحيحة ، على المجال ج : $\models_{ج} \Phi$

Φ هي صحيحة : $\models \Phi$

كلمات مختصرة :

صادق : ص

كاذب : ك

منطق القضايا : مق

مسلمة : سل

قاعدة الوضع : ضع

قاعدة التعميم : عم

مسألة الاستنباط : نبط

● ● ●

فهرس الاصطلاحات

biconditional	Bisubjunktion	bicoditionnelle	تشارط ٢١
inclusion	Inklusion	inclusion	تضمن ٢٥١
equality	Gleichheit	égalité	تعادل ٢٥١
transitivity	Transitivität	transitivité	تعدي ٤٨، ٥٥، ٥٩، ٢٤٠
definition	Definition	définition	تعريف ٨٦، ٨٨
generalization	Generalisation	généralisation	تعميم ١٩٢، ٢٠٥
interpretation	Deutung	interprétation	تفسير ١٧٧، ١٧٩، ١٨٠
intersection	Durchschnitt	intersection	تقاطع ٢٥١
value assignment	Bewertung	évaluation	تقييم ٣٤، ١١٨
idempotency	Indempotenz	idempotence	تكافؤ القوة ٦١
equivalence	Äquivalenz	équivalence	تلازم ٥١
completeness	Vollständigkeit	complétude	تمامية ١٠٨
semantical –	semantische –	– sémantique	– دلالية ١٠٨
syntactical –	syntaktische –	– syntaxique	– نحوية ١١٣، ١١٤
symmetry	Symmetrie	symétrie	تناظر ١٧٠، ٢٣٩
contradiction	Widerspruch	contradiction	تناقض
consistency	Widerspruchs-freiheit	non –	عدم الـ – ١٠٥
distributivity	Distributivität	distributivité	توزيع ٦٠
excluded middle	**ausgeschlossenes Drittes**	**tiers exclu**	**ثالث مرفوع ٥٧**
truth table	**Wahrheitstafel**	**table de vérité**	**جدول الصدق ١٦**
term	**Term**	**terme**	**حد ١٤٣، ٢٣١، ٢٣٢**
elimination	Beseitigung	élimination	حذف

– of the quantifiers	– der Quantoren	– des quantificateurs	– الأسوار ٢٠٦، ٢٠٧
– of the connetives	– der Junktoren	– des connecteurs	– الروابط ١٣٣، ١٣٤
calculus	Kalkül	calcul	حساب ٧٦، ٧٧، ٨٤
satisfy	erfüllen	réaliser	حقق ١٨١، ١٨٢، ١٨٣
connective	**Junktor**	**connecteur**	**رابط ١٥**
copula	Kopula	copule	رابطة ١٤٧
description	Kennzeichnung	description	رسم ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٦
negation	**Negation**	**négation**	**سلب ١٥**
quantifier	Quantor	quantificateur	سور
universal –	Allquantor	– universel	– كلي ١٤٤، ١٤٥
existential –	Existenzquantor	– existentiel	– وجودي أو بعضي ١٤٤، ١٤٥
figure	**Figur**	**figure**	**شكل ٧٦، ٧٧**
axiom schema	Axiomenschema	schéma d'axiomes	شكل مسلمات ١٣٠، ١٩١
conditional	Subjunktion	conditionelle	شرط ١٩
true	**wahr**	**vrai**	**صادق ١٦**
validity	Allgemeingültigkeit	validité	صحة ٤٠، ٤٣، ١٨٤، ١٨٥

valid	allgemeingültig	valide	صحيح ٣٨، ١٨٥
property	Eigenschaft	propriété	صفة ١٧٤
propositional form	Aussageform	forme de proposition	صورة قضية ١٤، ١٥، ١٤٣
normal form	Normalform	forme normale	صورة سالمة ٦٥
disjunctive –	disjunktive –	– disjonctive	– منفصلة ٦٩
conjuctive –	konjunctive –	– conjonctive	– متصلة ٦٥
formal	formal	formale	صوري ٧٦، ١٠٤
formula	Formel	formule	صيغة ١٥، ١٦٦، ٢٣٢، ٢٣٧
operator	**Operator**	**opérateur**	**عامل**
			– λ ٢٤٩
			– ι ٢٤٤
consistency	Widerspruchsfreiheit	non-contradiction	عدم تناقض
semantical –	semantische –	– sémantique	–دلالي ١٠٦
syntactical –	syntaktische –	– syntaxique	–نحوي ١٠٥، ١٠٦
relation	Relation	relation	علاقة ١٧٥
semantics	Semantik	sémantique	علم الدلالة ٥٦، ١٧٣
invalid	**ungültig**	**non-valide**	**فاسد ٣٨**
individual	Individuum	individu	فرد ١٧٦
hypothesis	Hypothese	hypothèse	فرضية ٧٩، ٨٩، ١٩٤

deducible	**ableitbar**	**déduit**	قابل للاستنباط ٩٥
satisfiable	erfüllbar	réalisable	قابل للتحقق ١٨٣
rule	Regel	règle	قاعدة ٧٧، ٧٨
– of inference	Schlussregel	– d'inférence	– استدلال ٨٧، ٨٨، ١٢٨، ١٩٢
formation –	Formulierungs-regel	– de formulation	– صياغة ٨١، ٨٧، ١١٦، ٢٣١، ٢٣٧
proposition	Aussage	proposition	قضية ١٣، ١٤١، ١٤٤، ١٤٧
parenthesis	Klammer	paranthèse	قوس ٢٦، ٢٧
syllogism	Syllogismus	syllogisme	قياس ١٤٠
truth-value	Wahrheitswert	valeur de vétrié	قيمة صدقية ١٦، ١٧٩
false	**falsch**	**faux**	كاذب ١٦
implication	**Implikation**	**implication**	لزوم ٤١، ٤٢، ١٨٤
language	Sprache	langue	لغة ٢٦، ٨١، ١٦٤
object-language	Objektsprache	– d'objet	– شيئية ٣١
metalanguage	Metasprache	métalangue	– ما ورائية ٣١
extension	**Extension**	**extension**	ما صدق ١٧٤، ١٧٦
variable	Variable	variable	متغير
function –	Funktionvariabel	– de fonction	– تابع ٢٣١

propositional –	Aussagevariable	– de proposition	– قضية ١٤
predicate –	Prädikatvariable	– de prédicat	– محمول ١٥٠، ١٥٧
free –	freie –	– libre	– مطلق ١٦٨
bound -	gebundene –	– liée	– مقيَّد ١٦٨
subject –	Subjektvariable	– de sujet	– موضوع ١٤٣
metavariable	Metavariable	metavariable	متغير ماورائي ٣٢، ٤٢، ٤٧، ١٦٥، ١٦٦، ٢٣١
contradictory	widerspruchsvoll	contradictoire	متناقض ٣٣
domain	Bereich	domaine	مجال ١١٩، ١٧٩
predicate	Prädikat	prédicat	محمول ١٤١
two-place –	zweistelliges –	– à deux places	–ثنائي ١٥٣، ١٥٥
many - place –	mehrstelliges –	– à plusieurs places	–متعدد الحدود ١٥٧
axiom	Axiom	axiome	مسلمة ٨٥، ٨٧، ٢٣٩
identity	Identität	identité	مساواة ٢٣٤
free	frei	libre	مطلق ١٦٨
– for	– für	– pour	– لِـ ١٦٩
complement	Komplement	complément	معدول ٢٥٥
comprehension	Intension	compréhension	مفهوم ١٧٤، ١٧٦
antecedent	Antezedens	antécédent	مقدم ١٩
premiss	Prämisse	prémisse	مقدمة ٤٢
bound	gebunden	lié	مقيد ١٦٨

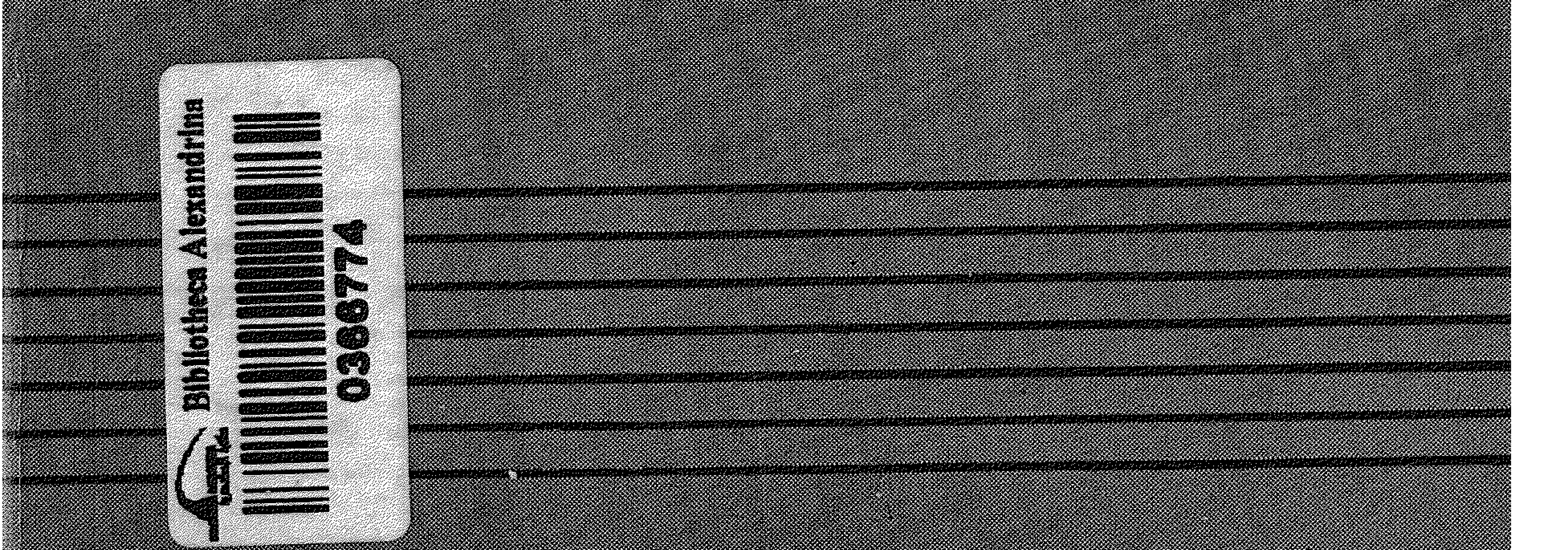
remplacement	Ersetzung	remplacement	مناب ٥٣، ٥٤، ٢٠١، ٢٠٤، ٢٤١
non-disjunction	Negatkonjunktion	non-disjonction	منع الفصل ٢٥
non-conjunction	Negatdisjunktion	non-conjonction	منع الوصل ٢٥
logic	Logik	logique	منطق
propositional –	Aussagenlogik	– des propositions	– القضايا ١٤، ١٩٦
predicate –	Prädikatenlogik	– des prédicats	– المحمولات ١٦٤، ١٩١
open	offen	.ouvert	مهمل ١٦٨
subject	Subjekt	sujet	موضوع ١٩١
conclusion	**Konklusion**	**conclusion**	**نتيجة ٤٢**
syntax	Syntax	syntaxe	نحو ٧٦، ١٩١
axiomatic system	Axiomensystem	système axiomatique	نسق أكسيومي ٨٤، ١٠٤، ١٩١
set theory	Mengenlehre	théorie des ensembles	نظرية المجموعات ١٩١
tautology	**Tautologie**	**tautologie**	**هيهية ٣٨**
conjunction	**Konjunktion**	**conjonction**	**وصل ١٧**
occurrence	Vorkommen	occurrence	وقوع ١٦٨

هذا الكتاب

ليس المنطق الرياضي أو المنطق الحديث علماً جديداً من مناهج الفكر يقوم إلى جانب المنطق القديم أو التقليدي ، بل هو الصورة الأكمل والأشمل لعمليات الاستدلال الصوري وهو بالتالي يستوعب مفاهيم وطرق المنطق القديم وبالطبع يتجاوزها في عدة أمور منها دقة التعريفات وصرامة الصياغة الرمزية ويقينية الاستدلال وتعدد مجالات التطبيق الخ .

ولا شك أن المنطق الرياضي يشكل اليوم وسيلة لا غنى عنها لكثير من العلوم . فبالإضافة إلى أنه يقوّم الهيكلية الأساسية للمعرفة الفلسفية المعاصرة فالحاجة إليه لتأسيس الرياضيات وبعض العلوم المجاورة هي من الضروريات . وكذلك أصبحت الفائدة كبيرة في الاستعانة به في المعارف الانسانية وخصوصاً اللسانية منها ، التي أخذت تتحرى طرائقه الموثوق منها .

هذا الكتاب الذي تبنته أغلب الجامعات العربية ، يعرض بالتفصيل أصول هذا العلم في آخر تطوراته . وعلى وجه الخصوص يتناول بالبحث منطق القضايا ومنطق المحمولات اللذين يعتبران الركنين الأولين اللذين يعتمد عليهما كل بناء ضروري .



المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع